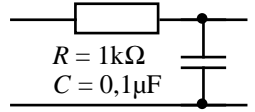


CONSTRUCTION D'UNE ÉCHELLE LOG-LOG - APPLICATION AU PLAN DE BODE

Matériel nécessaire : papier millimétré linéaire ou grapheur (échelle linéaire). L'unité en x et y est le cm.

On veut représenter graphiquement le module de la fonction de transfert

$T(f)$ du filtre RC ci-dessous (F_0 = fréquence de coupure) :



$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_0}\right)^2}} \quad \text{avec } T = 1/\sqrt{2} \text{ pour :}$$

$$F_0 = \frac{1}{2\pi RC} \approx 1,6 \text{ kHz}$$

Remplir la colonne [B] du tableau [I].

1) Courbe [1]. On veut tracer le graphe $y = T(x)$ sur papier millimétré linéaire (x en abscisse étant la variable, exprimée en cm, représentant sur ce papier la fréquence f).

Axes des abscisses :

Origine : $x = 0$ pour $F_1 = 0$ Hz

Échelle : $L_1 = 1$ cm pour $\Delta f = 1$ kHz

Quelle est la relation entre x et L_1, f et Δf ?

Graduer l'axe des abscisses en x (au dessus) et en f (au dessous).

Axes des ordonnées :

Origine : $y = 0$ pour $T = 0$

Échelle : $y = L'_1 = 10$ cm pour $T = 1$

Compléter les colonnes [D] et [C] du tableau [I].

Exprimer y en fonction de $L'_1, x, L_1, \Delta f$ et F_0 (*cette relation est la fonction réellement tracée sur la feuille de papier millimétré*).

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer (*en rouge*) sur ce graphe les points calculés dans le tableau I (abscisses : col. D ; ordonnées : col. C).

Placer le point correspondant à F_0 .

2) Courbe [2]. On veut, sur papier millimétré linéaire, construire une échelle logarithmique selon l'axe des abscisses. Pour cela, on fait le changement de variable :

$$x = L_2 \log \frac{f}{F_2}$$

Axe des abscisses :

Origine : $x = 0$ pour $F_2 = 1$ Hz

Échelle : $L_2 = 1$ cm pour $\Delta(\log f) = 1$

A quel rapport de fréquence $r = f_B/f_A$ correspond la longueur L_2 ?

Graduer l'axe des abscisses en x (au dessus) et en f (au dessous).

Axe des ordonnées : sans changement.

Compléter la colonne [E] du tableau [I].

Exprimer y en fonction de L'_1, x, L_2 et F_0 .

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer (en rouge) sur ce graphe les points calculés dans le tableau I (abscisses : col. E ; ordonnées : col. C). Placer le point correspondant à F_0 .

3) Courbe [3]. Quel est le défaut de la courbe [2] ? Pour y remédier on modifie celle-ci de la façon suivante :

3-1) Axe des abscisses :

Origine : $x_3 = 0$ pour $F_3 = 100$ Hz

Échelle : $L_3 = 10$ cm pour $\Delta(\log f) = 1$

Quelle est la relation entre x et L_3, F_3 et f ?

Compléter la colonne [F] du tableau [I].

Graduer l'axe des abscisses en x (au dessus) et en f (au dessous).

Axe des ordonnées : sans changement.

Exprimer y en fonction de L'_1, x, L_3, F_3 et F_0 .

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer (en rouge) sur ce graphe les points calculés dans le tableau I (abscisses : col. F ; ordonnées : col. C).
Placer le point correspondant à F_0 .

3-2) Quel est le défaut que présente l'ensemble des points marqués en rouge ? Pour y remédier, on veut des points équidistants d'un intervalle correspondant à un doublement de fréquence ($r = 2$, soit une octave).

Quelle sera alors la distance en mm entre deux points ?

Compléter le tableau [II], colonnes [A] et [E], pour :

$$100 \leq f \leq 20000 \text{ Hz}$$

Placer les points correspondants (*en bleu*) sur la courbe [3].

4) Courbe [4].

Axe des abscisses : sans changement.

Axe des ordonnées : on veut que cet axe ait aussi une échelle logarithmique. On considère la fonction $y = \log[T(x)]$.

Origine : $y = 0$ pour $T = 1$

Échelle : $L'_2 = 1 \text{ cm}$ pour $\Delta \log[T(x)] = \Delta y = 1$

Exprimer y en fonction de L'_2, x, L_3, F_3 et F_0 .

Compléter le tableau [II], colonnes [B] et [C]

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer (*en bleu*) sur ce graphe les points calculés dans le tableau II (abscisses : colonne E ; ordonnées : colonne C).

Placer le point correspondant à F_0 .

5) Courbe [5].

Quel est le défaut de la courbe [4] ? Pour y remédier on modifie l'échelle des ordonnées. Dans la pratique, on utilise le gain G de la fonction de transfert, exprimé en décibels par : $G = 20 \log T$.

Axe des ordonnées :

origine : $y = 0$ pour $G = 0$

échelle : $L'_3 = 10 \text{ cm}$ pour $\Delta G = 20$

Compléter la colonne [D] du tableau [II].

Exprimer y en fonction de L'_3, x, L_3, F_3 et F_0 .

Tracer le graphe $y(x)$. Marquer en bleu les points calculés.

Tableau I

A	B	C	D	E	F
f [Hz]	T	y [cm]	x [cm]	x [cm]	x [cm]
0					
100					
1000					
2000					
4000					
6000					
8000					
10000					
12000					
14000					
16000					
18000					
20000					

Tableau II

A	B	C	D	E
f [Hz]	T	y [cm]	G [dB]	x [cm]
100				

REPOSES

1) Courbe [1]

$$x_{[cm]} = f_{[Hz]} \frac{L_1}{\Delta f} \Leftrightarrow f = \frac{\Delta f}{L_1} \cdot x$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_0}\right)^2}} \Rightarrow y = \frac{L'_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Delta f}{F_0} \frac{x}{L_1}\right)^2}}$$

A.N. : $\Delta f = 1 \text{ kHz}$; $F_0 = 1,6 \text{ kHz}$; $L_1 = 1 \text{ cm}$; $L'_1 = 10 \text{ cm}$

$$y = \frac{10}{\sqrt{1 + 0,395 \cdot x^2}}$$

2) Courbe [2]

$$\Delta(\log f) = \log f_B - \log f_A = \log \frac{f_B}{f_A} = \log r = 1 \Rightarrow r = 10, \text{ soit une}$$

décade.

$$x = L_2 \log \frac{f}{F_2} \Rightarrow f = F_2 \cdot 10^{x/L_2}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_0}\right)^2}} \Rightarrow y = \frac{L'_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_2}{F_0} 10^{x/L_2}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0 = 1,6 \text{ kHz}$; $F_2 = 1 \text{ Hz}$; $L_2 = 1 \text{ cm}$; $L'_1 = 10 \text{ cm}$

$$y = \frac{10}{\sqrt{1 + 3,95 \cdot 10^{-7} \cdot 10^{2x}}}$$

3) Courbe [3]

3-1) On constate que l'échelle de la courbe 2 n'est pas satisfaisante : presque tout le graphe est concentré à gauche de la feuille.

$$x = L_3 \log \frac{f}{F_3} \Rightarrow f = F_3 \cdot 10^{x/L_3}$$

$$T = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_0}\right)^2}} \Rightarrow y = \frac{L'_1}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_3}{F_0} 10^{x/L_3}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0 = 1,6 \text{ kHz}$; $F_3 = 100 \text{ Hz}$; $L_3 = 10 \text{ cm}$; $L'_1 = 10 \text{ cm}$

$$y = \frac{10}{\sqrt{1 + 3,95 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{0,2x}}}$$

3-2) On constate que les points sont mal répartis : l'écart géométrique entre deux points (pour un écart de fréquence constant, de 2 kHz ici) est trop grand dans la partie gauche du graphe puis trop faible à droite. Une échelle de valeurs logarithmique permet de remédier à ce problème.

4) Courbe [4]

$$y = L'_2 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_3}{F_0} 10^{x/L_3}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0 = 1,6 \text{ kHz}$; $F_3 = 100 \text{ Hz}$; $L_3 = 10 \text{ cm}$; $L'_2 = 1 \text{ cm}$

$$y = 10 \log \frac{1}{\sqrt{1 + 3,95 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{0,2x}}} = -5 \log(1 + 3,95 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{0,2x})$$

5) Courbe [5]

Même constat que pour la courbe 2 : l'échelle de la courbe 4 n'est pas satisfaisante. Presque tout le graphe est concentré en haut de la feuille.

$$G = 20 \log T = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{f}{F_0}\right)^2}}$$

$$\Rightarrow y = \frac{L'_3}{20} 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_3 \cdot 10^{x/L_3}}{F_0}\right)^2}} = L'_3 \log \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_3 \cdot 10^{x/L_3}}{F_0}\right)^2}}$$

A.N. : $F_0 = 1,6 \text{ kHz}$; $F_3 = 100 \text{ Hz}$; $L_3 = 10 \text{ cm}$; $L'_3 = 10 \text{ cm}$

$$y = -10 \log \left(1 + 3,95 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{0,2x} \right)$$

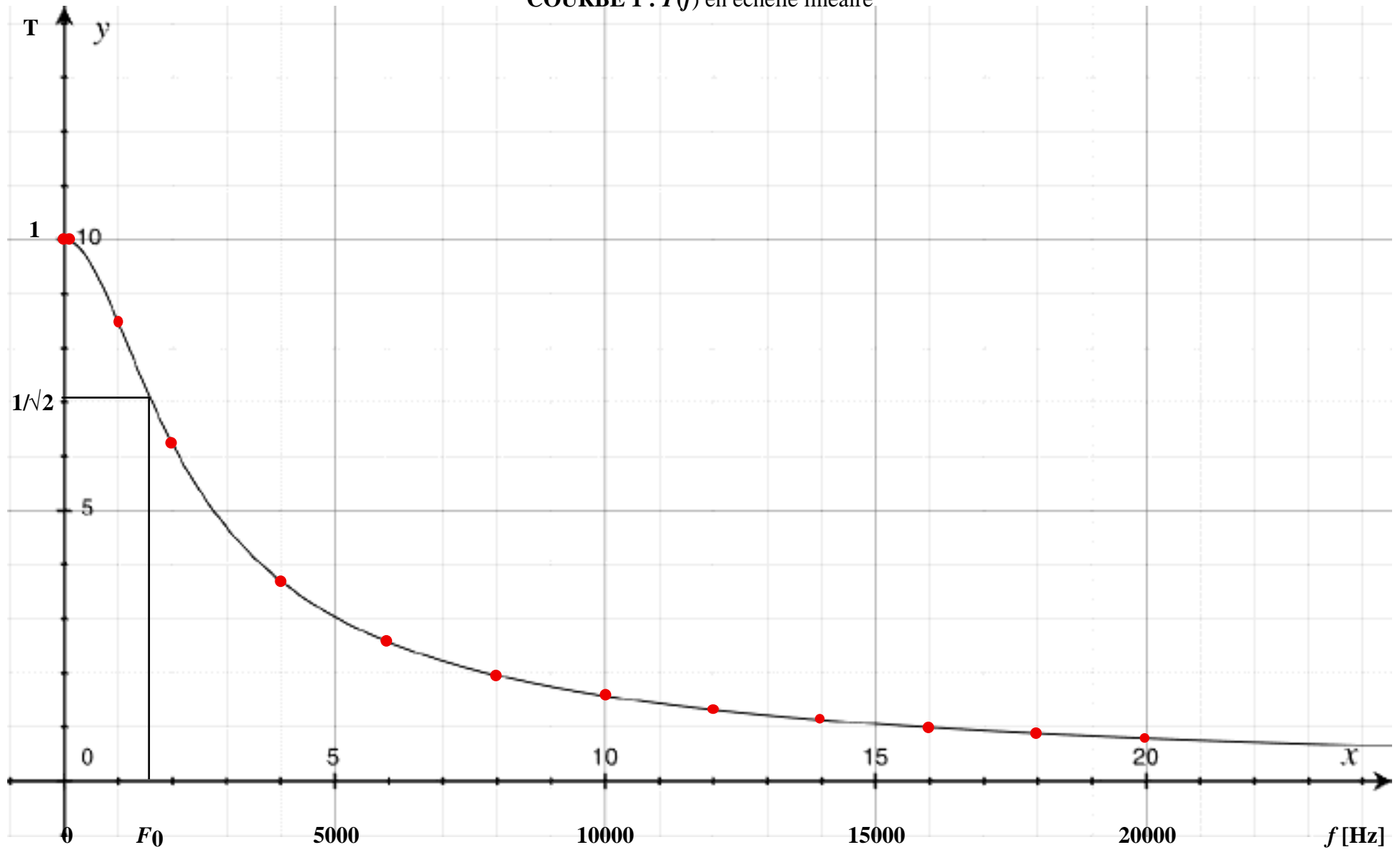
Tableau I

A	B	C	D	E	F
f [Hz]	T	y [cm]	x [cm]	x [cm]	x [cm]
0	1,000	10,0	0,0	-	-
100	0,998	10,0	0,1	2,0	0,0
1000	0,847	8,5	1,0	3,0	10,0
2000	0,623	6,2	2,0	3,3	13,0
4000	0,370	3,7	4,0	3,6	16,0
6000	0,256	2,6	6,0	3,8	17,8
8000	0,195	2,0	8,0	3,9	19,0
10000	0,157	1,6	10,0	4,0	20,0
12000	0,131	1,3	12,0	4,1	20,8
14000	0,113	1,1	14,0	4,1	21,5
16000	0,099	1,0	16,0	4,2	22,0
18000	0,088	0,9	18,0	4,3	22,6
20000	0,079	0,8	20,0	4,3	23,0

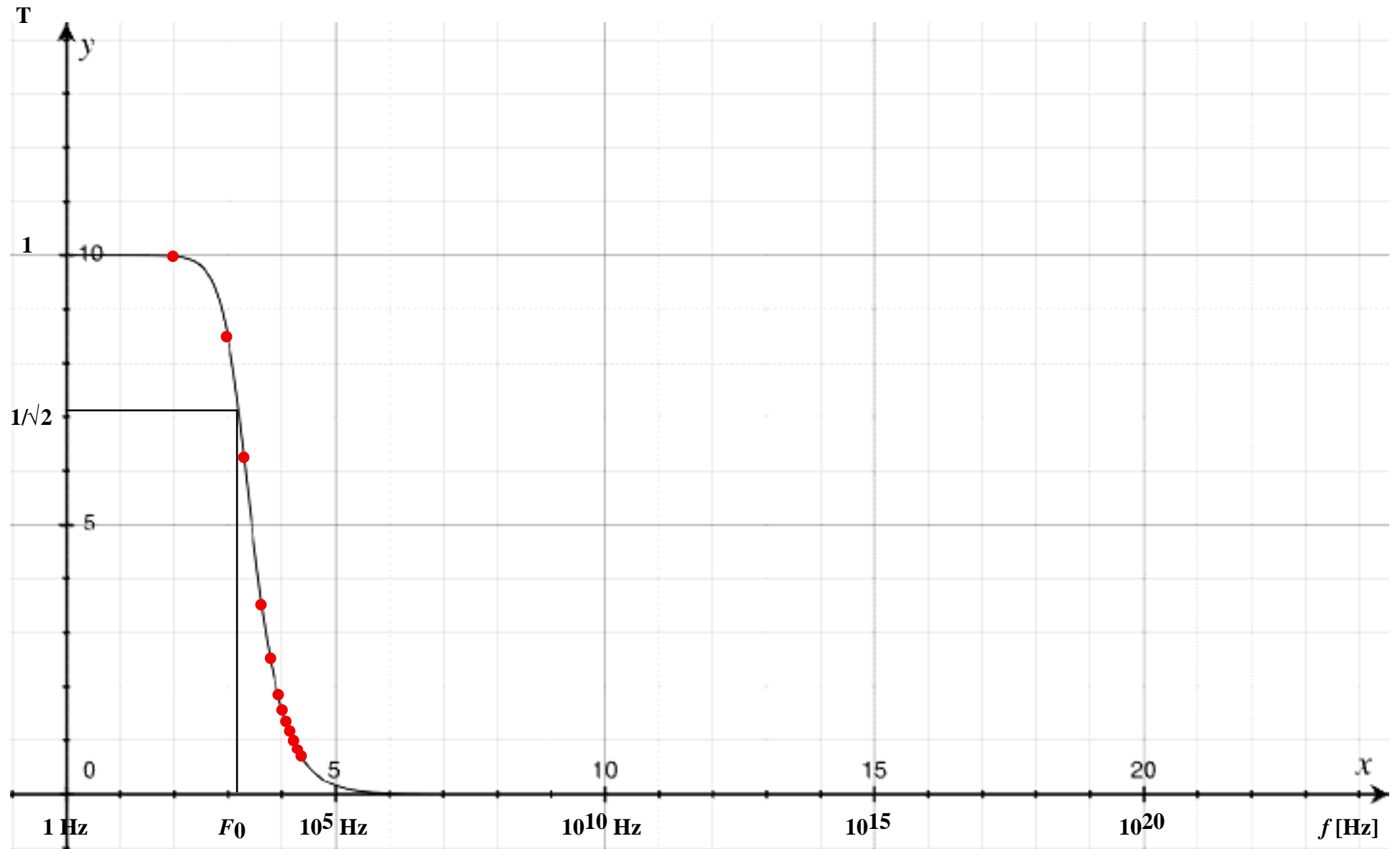
Tableau II

A	B	C	D	E
f [Hz]	T	y [cm]	G [dB]	x [cm]
100	0,998	-0,0	-0,0	0,0
200	0,992	-0,0	-0,1	3,0
400	0,970	-0,1	-0,3	6,0
800	0,893	-0,5	-1,0	9,0
1600	0,705	-1,5	-3,0	12,0
3200	0,445	-3,5	-7,0	15,1
6400	0,241	-6,2	-12,4	18,1
12800	0,123	-9,1	-18,2	21,1
20000	0,079	-11,0	-22,0	23,0

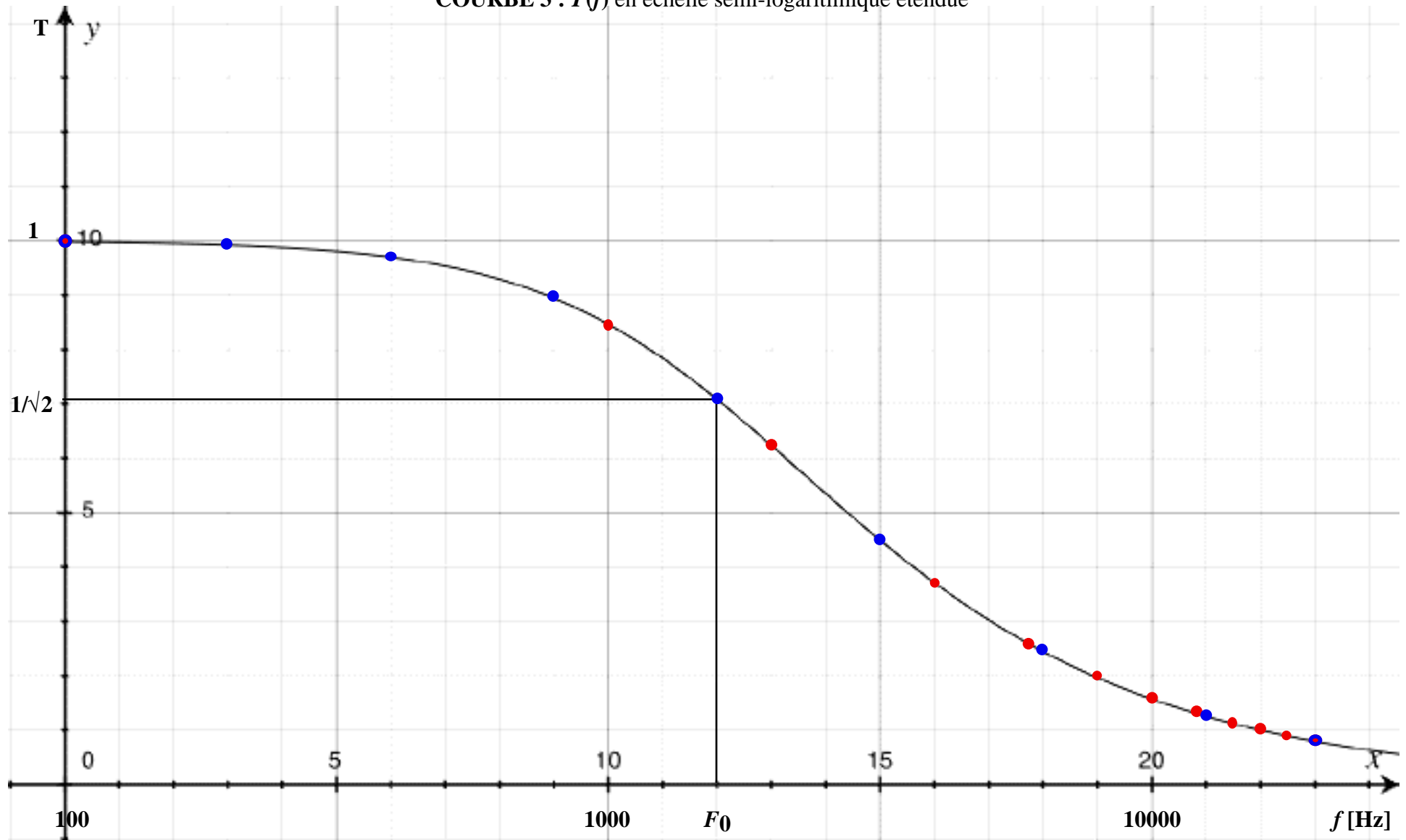
COURBE 1 : $T(f)$ en échelle linéaire



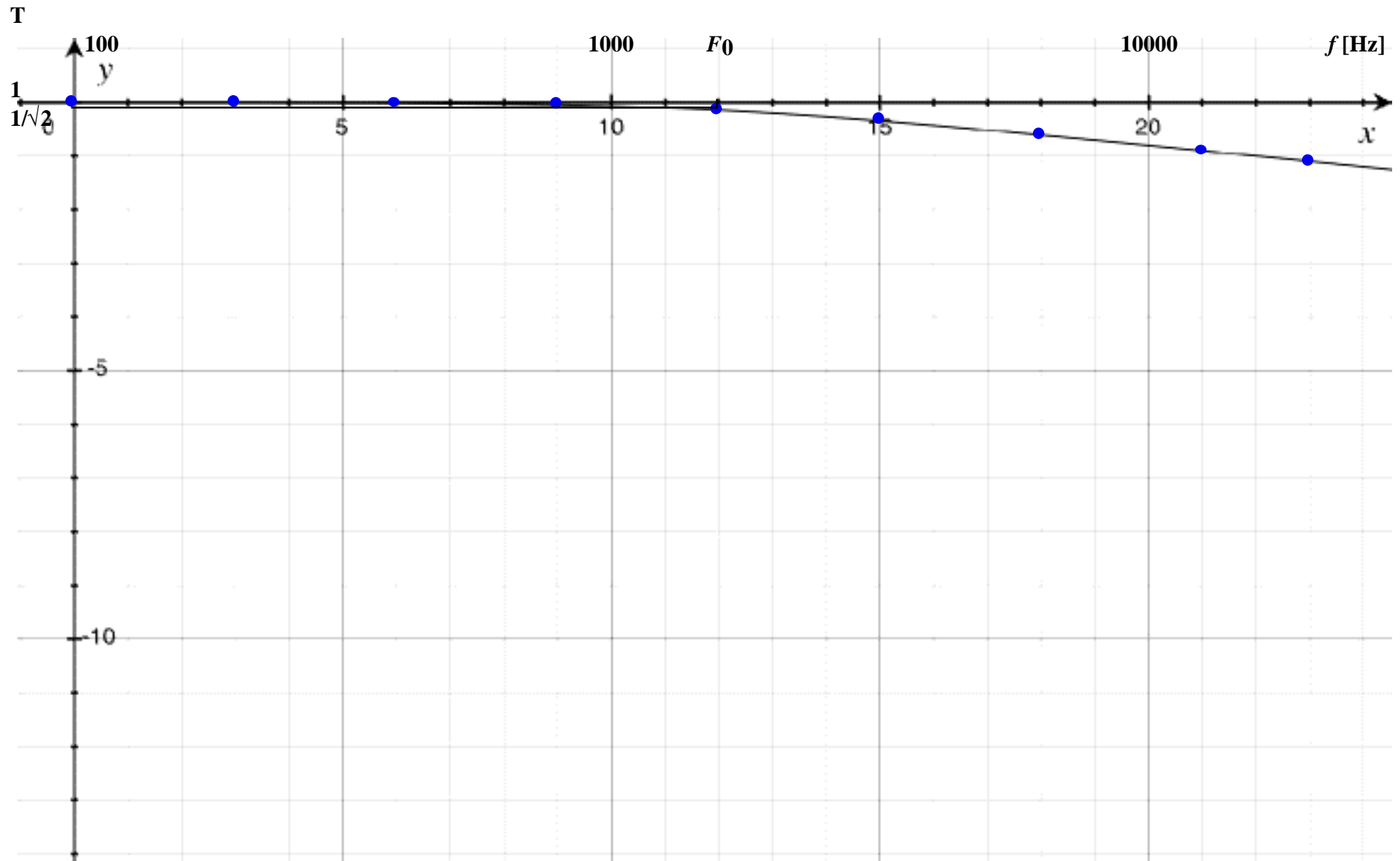
COURBE 2 : $T(f)$ en échelle semi-logarithmique



COURBE 3 : $T(f)$ en échelle semi-logarithmique étendue



COURBE 4 : $T(f)$ en échelle log-log



COURBE 5 : $T(f)$ en échelle log-log étendue, T exprimée en décibels : $G = 20\log[f(f)]$ 