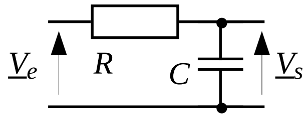
A14-1- Filtre passe-bas



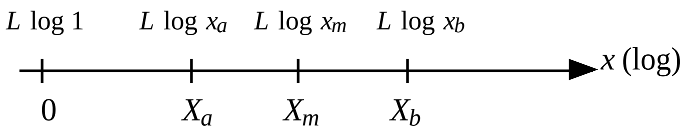
a) Etablir l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}$ (jω) du filtre RC ci-contre. En déduire l'expression de sa fréquence de coupure à –3dB.
b) Tracer succinctement l'allure de la courbe de gain dans le plan de Bode.
c) Une dynamo tachymétique est un capteur de vitesse constitué d'une machine à courant continu fonctionnant en génératrice. Elle possède un collecteur constitué de 20 lames. Calculer la fréquence des parasites qu'elle génère lorsqu'elle tourne à 1000 tr/mn.
d) Calculer la valeur du produit *RC* pour atténuer ces parasites de 20 dB.

A14-2- Action d'un circuit RC passe-bas sur un signal composite

On soumet un circuit RC passe-bas à une tension $v_e(t) = 20 \sin(2\pi 5t) + 20 \sin(2\pi 500t)$. On donne : $R = 3200\ \Omega$; $C = 1\ \mu F$. Établir l'expression de la tension $v_s(t)$. Conclusion.

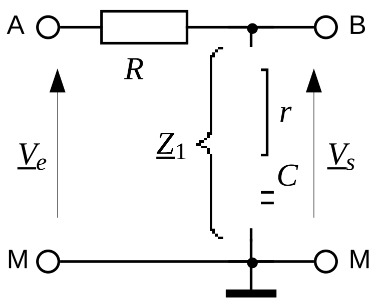
A14-3- Filtre Passe-bande

Soit une grandeur *x* représentée sur un axe en échelle logarithmique par des graduations telles que $X = L \log x$ (logarithmes décimaux) où *L* est une unité de longueur. Soit *m* le point milieu entre deux graduations *a* et *b* tel que : $X_b - X_m = X_m - X_a$.



a) Calculer x_m en fonction de x_a et x_b.
b) Une ligne téléphonique normalisée transmet la voix entre 300 et 3400 Hz en associant un filtre passe-haut suivi d'un filtre passe-bas. Quel est le type du filtre ainsi réalisé ? Quelle est sa fréquence centrale f_m ? Donner sur papier libre l'allure du diagramme asymptotique du filtre.
c) On suppose que ces filtres sont du premier ordre. Exprimer la fonction de transfert $\underline{T}_B(f)$ du filtre passe-bas et celle $\underline{T}_H(f)$ du filtre passe-haut en fonction de *f*.
d) La fonction de transfert globale du filtre téléphonique est : $\underline{T} = \underline{T}_H.\underline{T}_B$. En déduire l'expression de son gain en dB. Application numérique : $f = f_m$.

A14-4- Correcteur proportionnel et intégral (ou filtre à retard de phase) .



Soit $r = 5\ k\Omega$; $R = 45\ k\Omega$; $C = 10\ nF$;
a) Soit $f = 0$ (⇔ la tension v_e est une tension continue). Dessiner le circuit équivalent au quadripôle ABM. Que vaut le rapport V_s / V_e ?
b) Soit $f \rightarrow \infty$. Dessiner le circuit équivalent au quadripôle ABM. Que vaut le rapport $\underline{V}_s / \underline{V}_e$?
c) Etablir l'expression de la fonction de transfert $\underline{T}(\omega)$
d) On pose : $f_1 = \dfrac{1}{2\pi rC}$ et $f_2 = \dfrac{1}{2\pi(r+R)C}$. Calculer f_1 et f_2.
e) Établir l'expression de G et φ en fonction de f, f_1 et f_2.
f) A.N. : remplir le tableau :
g) Indiquer sommairement l'allure des courbes de gain et de phase de la fonction de transfert du filtre.

	0	f2	1000 Hz	f1	f –> ∞
|T|					
G (dB)					
φ (°)					
Vs					

ISBN 2-9520781-1-4 http://www.syscope.net EAN 9782952078115

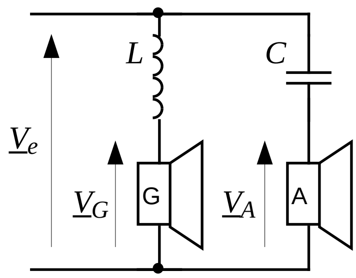
A14-5- Filtres pour enceinte acoustique

Une enceinte acoustique deux voies comprend un haut-parleur (HP) pour les fréquences graves et un HP pour les aigus. Par hypothèse, on fera les calculs en considérant que chaque HP est équivalent à une résistance R de 8Ω.

0) Pour une puissance utile de 10 W dans un HP quelle doit être la valeur efficace de la tension à ses bornes ?

Chaque HP est associé à un composant réactif (supposé parfait) pour former, respectivement, un filtre pour les graves et un filtre pour les aigus. Les filtres sont supposés fonctionner indépendamment l'un de l'autre.

1) De quels types de filtres s'agit-il ? Quel est leur ordre ? Quelle est leur atténuation par octave ?
2) Rappeler les expressions littérales des impédances $\underline{Z}_C$ du condensateur et $\underline{Z}_L$ de l'inductance en fonction de f.
3) En appliquant la méthode du pont diviseur de tension (en alternatif), établir les expressions littérales des tensions $\underline{V}_G$ et $\underline{V}_A$ en fonction de R, L (resp. C), f et $\underline{V}_e$.



4) En déduire les expressions littérales normalisées des fonctions de transfert $\underline{T}_G(f) = \underline{V}_G/\underline{V}_e$ et $\underline{T}_A(f) = \underline{V}_A/\underline{V}_e$ en fonction de R, L (resp. C), f.
5) Calculer L et C pour que la fréquence de coupure à –3dB (notée f_0) de ces filtres soit égale à 6000 Hz.

Dans la suite du problème, on adopte les valeurs suivantes :
R = 8Ω ; L = 0,22 mH ; C = 3,3 µF ; $v_e(t) = 9\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$

6) Pour f = 1000 et 10000 Hz calculer : $V_{G\text{eff}}$; Arg($\underline{V}_G$) (en °) ; $V_{A\text{eff}}$; Arg($\underline{V}_A$) (en °).
7) Tracer les diagrammes de Fresnel de ces tensions. Echelle : 1 cm ↔ 1 V
8) Calculer la fréquence pour laquelle V_G = 2 V
9) Calculer la fréquence pour laquelle V_A est déphasée de +60° par rapport à $\underline{V}_e$
10) Établir les expressions littérales normalisées des gains en dB de chaque filtre, notés G_G et G_A, en fonction de f et de f_0.
11) Calculer G_G et G_A pour f = 1000 et 10000 Hz.
12) Construire le diagramme asymptotique de $G_G(f)$ et de $G_A(f)$ pour $50 \leq f \leq 20000$ Hz.
13) Calculer la fréquence pour laquelle $G_G(f) = -8$dB
14) Calculer la fréquence pour laquelle $G_A(f) = -12$dB
15) Tracer sur le graphe précédent les courbes $G_G(f)$ et $G_A(f)$ pour $50 \leq f \leq 20000$ Hz.

A14-6- Filtre pour écouteur téléphonique analogique

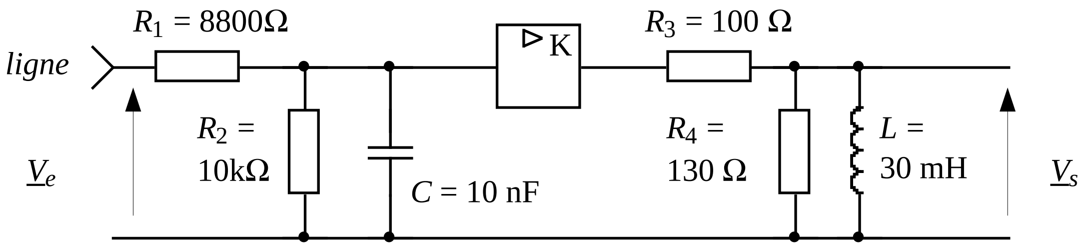
1) On considère le filtre constitué des composants R_1, R_2, C du schéma ci-dessous..

a) Établir l'expression littérale de sa fonction de transfert.

b) Tracer son diagramme asymptotique de gain

2) Mêmes questions pour le filtre R_3, R_4, L.

3) L'écouteur d'un poste téléphonique analogique peut être schématisé comme suit :

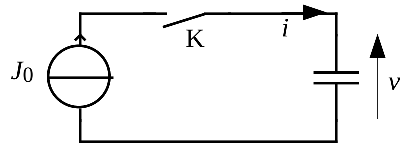


a) Calculer la fréquence f_0 pour laquelle le gain de cet appareil $G = 20\log|\underline{V}_s / \underline{V}_e|$ est maximal.

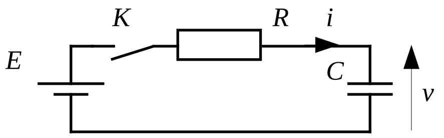
b) Calculer K pour que ce gain soit égal à 0 dB.

c) Quelle est la bande passante à –3dB de cet appareil.

A14-7- 1) *Charge d'un condensateur à courant constant :* à l'instant t = 0^+, on ferme l'interrupteur K. Ecrire l'équation différentielle du circuit. Résoudre (résolution littérale) cette équation pour déterminer $v(t)$ sachant que : à $t = 0$, $v(0) = V_0$.



2) *Charge d'un condensateur à tension constante :* à l'instant t = 0^+, on ferme l'interrupteur K. On pose : $\tau = RC$ (constante de temps). Ecrire l'équation différentielle du circuit. Résoudre (résolution littérale) cette équation pour déterminer $v(t)$ sachant que : à $t = 0$, $v(0) = V_0$.



Une "rampe de tension" est un signal croissant linéairement en fonction du temps. On se propose d'utiliser un des deux dispositifs précédents pour générer une telle rampe. On désire une rampe croissant de –2V *en* $t = 0$, *à* +2V *en* $t = 10$ ms. *On notera* ρ *la pente de cette rampe, exprimée en* V/s.

3) Tracer le graphe de cette rampe. Echelle : X : 1ms/cm ; Y : 0,5V/cm. Calculer ρ et V_0.

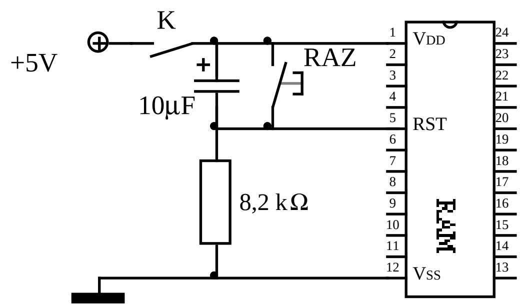
4) Dispositif de la question 2.1 : soit $C = 2{,}2$ µF. Quelle doit être la valeur de J_0 ?

5) Dispositif de la question 2.2. : soit $R = 10$ kΩ , $C = 2{,}2$ µF. Quelle doit être la valeur de E ?

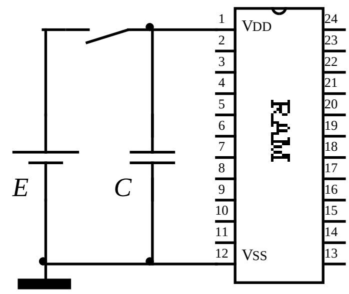
6) Soit $\varepsilon(t)$ l'écart entre les tensions $v_1(t)$ fournie par le circuit 2.1. et $v_2(t)$ fournie par le circuit 2.2. Exprimer $\varepsilon(t)$ en fonction de t, E, V_0, τ, ρ.

7) A quel instant $\varepsilon(t)$ est-il maximal ? Calculer $\varepsilon(t)$ à cet instant, en valeur absolue (volts) et en valeur relative (% de l'amplitude crête à crête de la rampe). Conclusion.

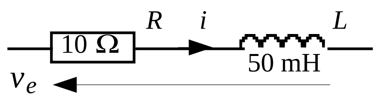
A14-8- 1) Un système de RAZ automatique à la mise sous tension est constitué d'un circuit CR. Le condensateur est initialement déchargé. A la fermeture de K, le condensateur se charge. Sachant que l'entrée RST est active (état haut) pour une tension ≥ 2,5V, pendant combien de temps reste-t-elle dans cet état après la fermeture de K ?

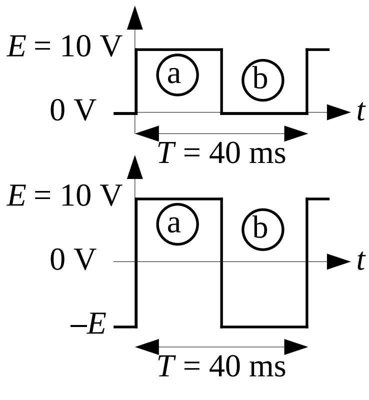


2) Un condensateur de sauvegarde de valeur $C = 1$F est associé à un circuit mémoire RAM CMOS dont la tension d'alimentation v doit être comprise entre E_{max} = 3,5 V et E_{min} = 3,1 V. On suppose qu'à t = 0, $v = E_{max}$. Sachant que le courant consom-mé par la mémoire en position d'attente (interrupteur ouvert) vaut J_0 = 500 nA, pendant combien de temps l'information contenue dans la mémoire sera-t-elle sauvegardée ?



A14-9-





1) Pour la tension $v_e(t)$ indiquée ci-contre, déterminer les expressions de $i(t)$ dans chaque cas (a et b) en supposant que $i(0)$ = 0. A.N. : calculer i pour t = 0 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ms.

2) Même question si $v_e(t)$ est une tension rectangulaire symétrique.

3) Même question pour T = 10 ms. On pose $I_{\min} = i(0)$; $I_{\max} = i(T/2)$

REPONSES

A14-1- a) $\underline{T} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}}$ *avec* $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC}$

c) N = 1000 tr/mn = 1000/60 tr/s $\Rightarrow$ $f = 20\dfrac{1000}{60} = 333\ \text{Hz}$

d) En 1er ordre, une atténuation de 20 dB correspond à un rapport de fréquence d'une décade. Il faut donc une fréquence de coupure égale à 33 Hz, soit : $\tau = RC = \dfrac{1}{2\pi f} = \dfrac{1}{2\pi 33} =$ 4,77 ms

A14-2- $\underline{T} = \dfrac{1}{1+\mathrm{j}\dfrac{f}{f_0}}$ *avec* $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC} \approx$ 50 Hz $\Rightarrow V_s = \dfrac{V_e}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}$ et $\arg(\underline{V}_s) = -\arctan\dfrac{f}{f_0}$

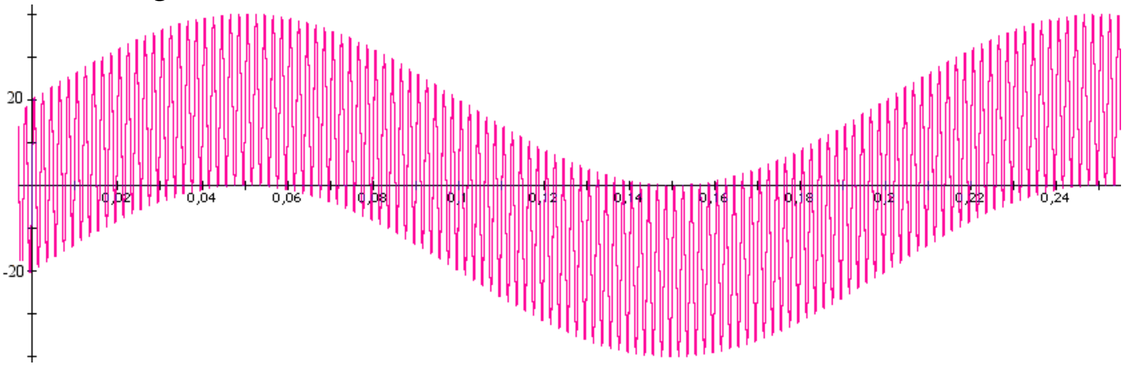
On trouve :

- pour f = 5 Hz : $V_s \approx$ 20 V (pratiquement pas d'atténuation) ; $\arg(\underline{V}_s) \approx -$ 0,01 rad ;
- pour f = 500 Hz : $V_s \approx$ 2 V (atténuation de 20 dB pour une décade, ce qui correspond à diviser l'amplitude V_e par 10) ; $\arg(\underline{V}_s) \approx -$ 0,15 rad

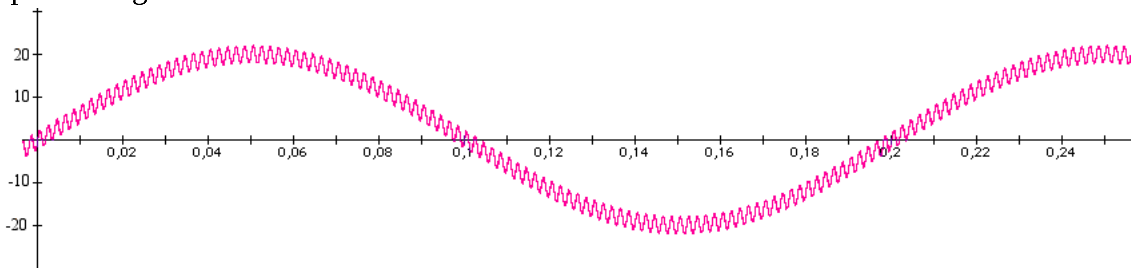
D'où : $v_s(t) = 20\sin(2\pi 5t - 0{,}01) + 2\sin(2\pi 500t - 0{,}15)$

Soit, graphiquement [Y : V ; X : s] :

- avant filtrage :



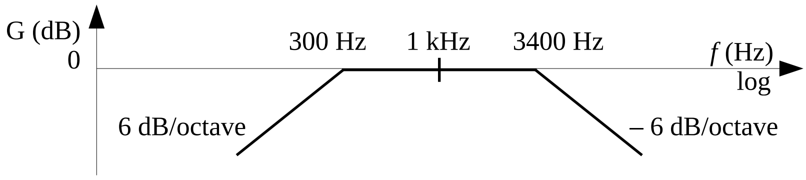
après filtrage :



A14-3- 1)

$$X_m - X_a = X_b - X_m \Rightarrow X_m = \frac{X_a + X_b}{2}$$

$$\Rightarrow \log x_m = \frac{\log x_a + \log x_b}{2} = \log\sqrt{x_a x_b} \Rightarrow x_m = \sqrt{x_a . x_b}$$



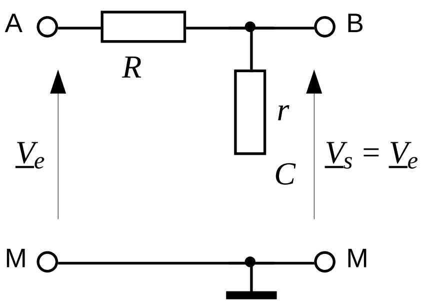
2) Filtre passe-bande ; $f_m = \sqrt{300.3400} = 1010\,Hz$

3) $\underline{T}_B = \dfrac{1}{1 + \mathrm{j}\dfrac{f}{3400}}$; $\underline{T}_H = \dfrac{\mathrm{j}\dfrac{f}{300}}{1 + \mathrm{j}\dfrac{f}{300}}$

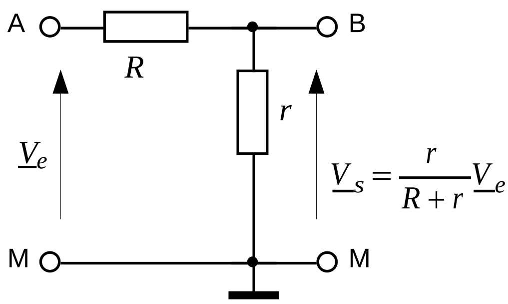
4) $G = 20\log\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{3400}\right)^2}} + 20\log\dfrac{\dfrac{f}{300}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{300}\right)^2}}$ = – 0,37 – 0,37 = – 0,74 dB

A14-4-

$f \to 0$



$f \to \infty$

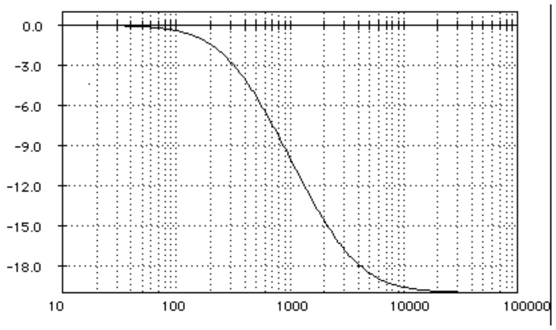


$\underline{T}(\omega) = \dfrac{1 + jrC\omega}{1 + j(r+R)C\omega} = \dfrac{1 + j\dfrac{f}{f_1}}{1 + j\dfrac{f}{f_2}}$ avec $f_1 = \dfrac{1}{2\pi rC} \approx$ 3180 Hz et $f_2 = \dfrac{1}{2\pi(r+R)C} \approx 318$ Hz

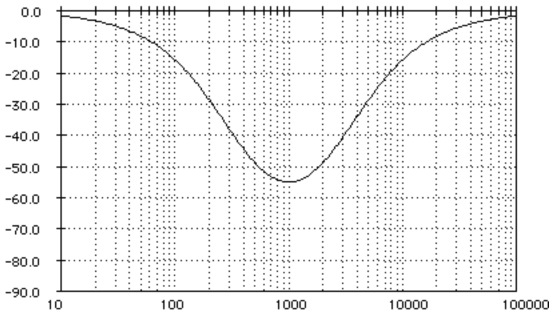
$\Rightarrow G = 20\log\dfrac{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_1}\right)^2}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_2}\right)^2}}$ et $\varphi = \arctan\dfrac{f}{f_1} - \arctan\dfrac{f}{f_2}$

questions :	11)	12)	13)	14)	15)
f	0	318	1000	3183	∞
|T|	1,000	0,711	0,318	0,141	0,100
f	3	318	1000	3183	300000
G (dB)	**0,000**	**-3,0**	**-10,0**	**-17,0**	**-20,0**
f	3	318	1000	3183	300000
φ (°)	**0,0**	**-39,3**	**-54,9**	**-39,3**	**0,0**
Vs (V)	2,000	1,421	0,636	0,281	0,200

Gain (dB) :



Phase (°) :



A14-5

0) $P_u = \dfrac{V_{\text{eff}}^2}{R} \Rightarrow V_{\text{eff}} = \sqrt{P_u.R} = \sqrt{10.8} \approx 9\text{V}$

1) Filtres du 1er ordre, resp. P-B et P-H, atténuation 6 dB/octave.

2) $\underline{Z}_L = \text{j}L2\pi f$; $\underline{Z}_C = 1/\text{j}C2\pi f$

3) $\underline{V}_G = \dfrac{R}{R+\text{j}L2\pi f}\underline{V}_e$; $\underline{V}_A = \dfrac{R}{R+\dfrac{1}{\text{j}C2\pi f}}\underline{V}_e$

4) $\underline{T}_G = \dfrac{\underline{V}_G}{\underline{V}_e} = \dfrac{1}{1+\text{j}\dfrac{L}{R}2\pi f}$; $\underline{T}_A = \dfrac{\underline{V}_A}{\underline{V}_e} = \dfrac{\text{j}RC2\pi f}{1+\text{j}RC2\pi f}$

5) $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\dfrac{L}{R}} \Rightarrow L = \dfrac{R}{2\pi f_0} = 212\mu\text{H}$; $f_0 = \dfrac{1}{2\pi RC} \Rightarrow C = \dfrac{1}{2\pi R f_0} = 3{,}3\mu\text{F}$

6) **et 11)**

$$V_{\text{Geff}} = V_{\text{eeff}}\frac{R}{\sqrt{R^2+(L2\pi f)^2}} = V_{\text{eeff}}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}$$

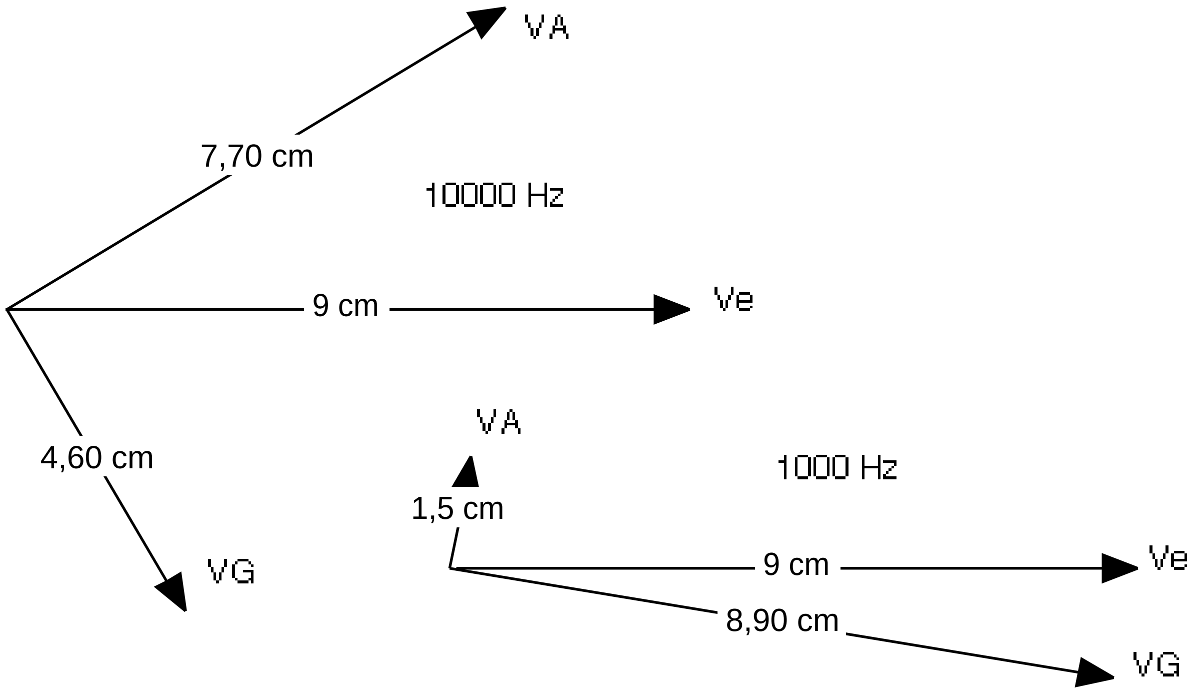
$$V_{\text{Aeff}} = V_{\text{eeff}}\frac{R}{\sqrt{R^2+\left(\dfrac{1}{C2\pi f}\right)^2}} = V_{\text{eeff}}\frac{\dfrac{f}{f_0}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}}$$

$$Arg(\underline{V}_G) = -\arctan\frac{L2\pi f}{R} = -\arctan\frac{f}{f_0}$$

$$Arg(\underline{V}_A) = \frac{\pi}{2} - \arctan(RC2\pi f) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{f}{f_0}$$

Ve	fo						
9	6000						
f	**f/fo**	VG	Arg(VG)	VA	Arg(VA)	GG (dB)	GA (dB)
1000	0,167	8,88	-9,5	1,48	80,5	-0,1	-15,7
10000	1,667	4,63	-59,0	7,72	31,0	-5,8	-1,3

7)

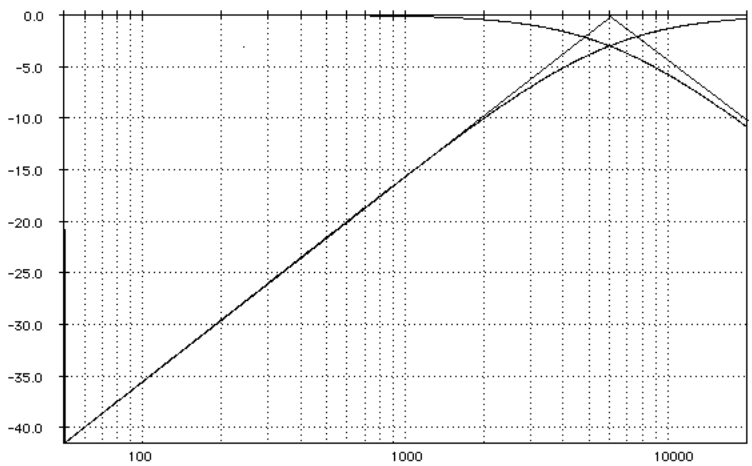


8) $f = f_0\sqrt{\left(\frac{V_e}{V_G}\right)^2 - 1} = 6000\sqrt{4,5^2 - 1} = 26 \text{ kHz}$

9) $f = f_0 \tan(\frac{\pi}{2} - \varphi) = 6000 \tan(90 - 60) = 3,5 \text{ kHz}$

10) $G_G = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$; $G_A = 20\log\frac{\frac{f}{f_0}}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}}$

12) et 15)



13) $G_G = 20\log\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2}} \Rightarrow \left(10^{\frac{G_G}{20}}\right)^2 = \frac{1}{1+\left(\frac{f}{f_0}\right)^2} \Rightarrow f = f_0\sqrt{\left(10^{\frac{8}{20}}\right)^2 - 1} \approx 13,8 \text{ kHz}$

14) $G_A = 20\log\dfrac{\dfrac{f}{f_0}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}} \Rightarrow \left(10^{\frac{G_A}{20}}\right)^2 = \dfrac{\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2}{1+\left(\dfrac{f}{f_0}\right)^2} \Rightarrow f = f_0\dfrac{1}{\sqrt{\left(10^{\frac{12}{20}}\right)^2-1}} \approx 1{,}5\text{ kHz}$

A14-6-

1) $\underline{T}_1 = \dfrac{R_2}{R_1+R_2}.\dfrac{1}{1+j\dfrac{R_1.R_2}{R_1+R_2}C\omega} = K_1\dfrac{1}{1+j\dfrac{f}{f_1}}$

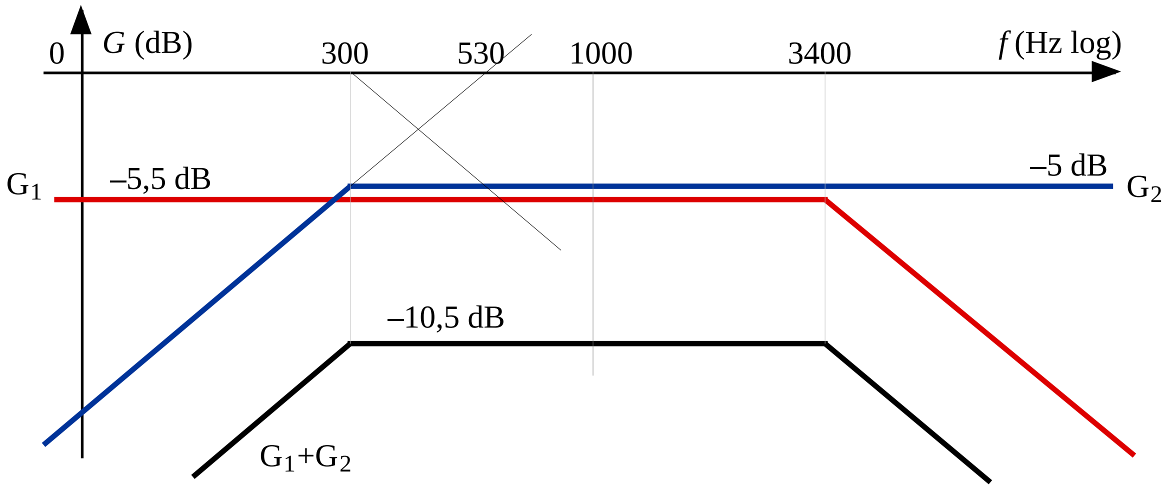
$f_1 = 3400$ Hz

$|\underline{T}_1| \xrightarrow[f\to 0]{} K_1 \Rightarrow G_1 \to 20\log K_1 \approx -5{,}5\text{dB}$

2) $\underline{T}_2 = \dfrac{j\dfrac{L}{R_3}\omega}{1+j\dfrac{R_3+R_4}{R_3.R_4}L\omega} = \dfrac{j\dfrac{f}{f_{2N}}}{1+j\dfrac{f}{f_{2D}}}$

$f_{2D} = 300$ Hz ; $f_{2N} = 530$ Hz

$|\underline{T}_2| \xrightarrow[f\to\infty]{} \dfrac{f_{2D}}{f_{2N}} \Rightarrow G_2 \to 20\log\dfrac{f_{2D}}{f_{2N}} \approx -5\text{dB}$



3) Bande passante à –3dB : 300 - 3400 Hz $\Rightarrow$ $f_0 = \sqrt{f_{2D}.f_1} = \sqrt{300.3400} \approx 1000\text{Hz}$

Il faut compenser l'atténuation globale de 10,5 dB par un amplificateur de gain *K :*

$\Rightarrow$ 20 log K = 10,5 $\Rightarrow$ $K = 10^{\frac{10{,}5}{20}} \approx 3{,}35$

A14-7- 1) $J_0 = C\dfrac{dv}{dt} \Rightarrow v = \dfrac{J_0}{C}t + V_0$

2) $\tau\dfrac{dv}{dt} + \tau = E \Rightarrow v = (V_0 - E)e^{-t/\tau} + E$

3) ρ = 400 V/s ; V_0 = –2V

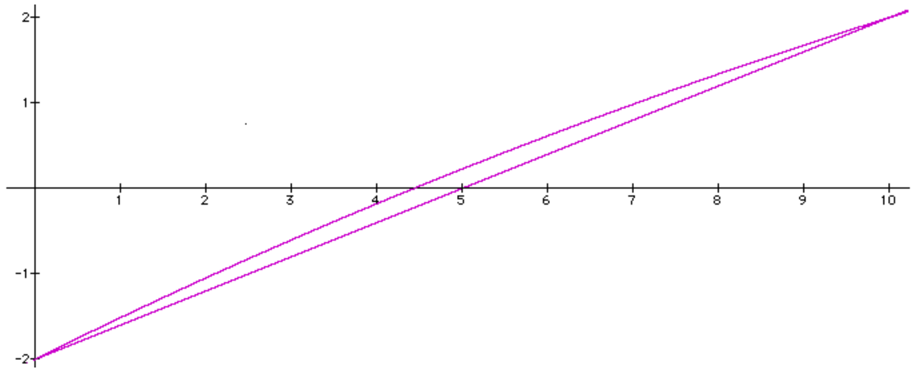
4) $J_0 = C\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ = 0,88 mA

5) τ = 22 ms ⇒ $(-2-E)e^{-10/22}+E = 2 \Rightarrow E = 8{,}95$V

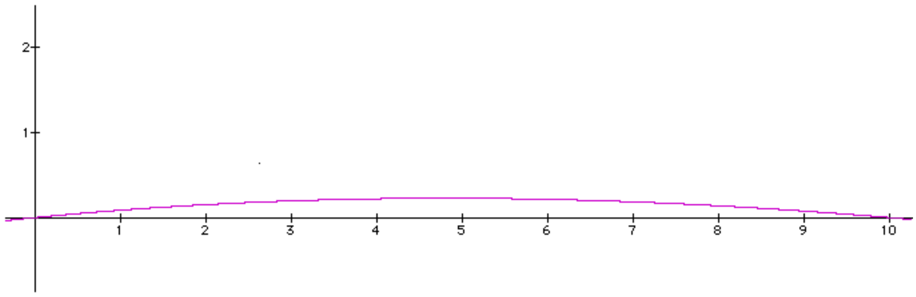
6) $\varepsilon(t) = \varepsilon(t) = (V_0 - E)e^{-t/\tau} + E - \rho t - V_0$

7) $\dfrac{d\varepsilon}{dt} = -\dfrac{(V_0 - E)}{\tau}e^{-t/\tau} - \rho = 0$ pour $t = \tau \ln\dfrac{E - V_0}{RJ_0}$ = 4,8 ms ⇒ ε = 226 mV ⇒ $\dfrac{\Delta v}{v} = \dfrac{\varepsilon}{4} \approx 5{,}7$ %

$v_1(t)$ et $v_2(t)$:



$\varepsilon(t)$:



A14-8- 1) τ = RC = 82 ms ; $\tau\dfrac{dv}{dt} + v = 5 \Rightarrow v = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \Rightarrow Ri = \tau\dfrac{dv}{dt} = E.e^{-t/\tau}$

$Ri \geq 2{,}5$ V pour t ≤ τ ln2 = 57 ms (durée de l'impulsion de RAZ à la mise sous tension)

2) $\Delta t = C.\Delta v / J_0 \approx 800.000$s ≈ 9 jours

A14-9- Par la loi des mailles, l'équation différentielle du circuit s'écrit :

$v_e = Ri + L\dfrac{di}{dt} \Rightarrow \tau\dfrac{di}{dt} + i = \dfrac{v_e}{R}$ avec $\tau = \dfrac{L}{R} = 5$ ms

1) Cas a :

$$\left.\begin{array}{l}\tau\dfrac{di}{dt} + i = \dfrac{E}{R} \\ i(0) = 0\end{array}\right\} \Rightarrow i = \dfrac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Remarque : $i\left(\frac{T}{2}\right)=i(4\tau)\approx\frac{E}{R}$: la charge de la bobine est presque complète.

1) Cas b : on prend pour nouvelle origine des temps (noté t') l'instant où v_e passe de E à 0. Cela équivaut à faire le changement de variable : $t\to t'=t-\frac{T}{2}$. On en déduit :

$$\left.\begin{array}{l}\tau\dfrac{di}{dt'}+i=\dfrac{E}{R}\\ i(0)=\dfrac{E}{R}\end{array}\right\}\Rightarrow i=\frac{E}{R}e^{-\frac{t'}{\tau}}=\frac{E}{R}e^{-\frac{t-T/2}{\tau}}$$

Remarque : $i(T)\approx 0$: la décharge de la bobine est presque complète.

1) A.N. :

t [ms]	0	5	10	15	20
i [A]	0	0,63	0,86	0,95	0,98

2) Cas a :

$$\left.\begin{array}{l}\tau\dfrac{di}{dt}+i=\dfrac{E}{R}\\ i(0)=-\dfrac{E}{R}\end{array}\right\}\Rightarrow i=\frac{E}{R}\left(1-2e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Remarque : $i\left(\frac{T}{2}\right)=i(4\tau)\approx\frac{E}{R}$: la charge de la bobine est presque complète.

2) Cas b :

$$\left.\begin{array}{l}\tau\dfrac{di}{dt'}+i=-\dfrac{E}{R}\\ i(0)=\dfrac{E}{R}\end{array}\right\}\Rightarrow i=-\frac{E}{R}\left(1-2e^{-\frac{t'}{\tau}}\right)=-\frac{E}{R}\left(1-2e^{-\frac{t-T/2}{\tau}}\right)$$

Remarque : $i(T)\approx-\frac{E}{R}$: la décharge de la bobine est presque complète.

2) A.N. :

t [ms]	0	5	10	15	20
i [A]	-1	0,26	0,73	0,90	0,96

3) *Par solution exacte :*

Cas a :

$$\left.\begin{array}{l}\tau\dfrac{di}{dt}+i=\dfrac{E}{R}\\ i(0)=I_{\min}\end{array}\right\}\Rightarrow i=\left(I_{\min}-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{t}{\tau}}+\frac{E}{R}$$

Remarque : $i\left(\frac{T}{2}\right)=I_{\max}=\left(I_{\min}-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}}+\frac{E}{R}\quad(1)$

Cas b :

$$\left.\begin{array}{l}\tau\dfrac{di}{dt'}+i=-\dfrac{E}{R}\\ i(0)=I_{\max}\end{array}\right\}\Rightarrow i=\left(I_{\max}+\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{t'}{\tau}}-\frac{E}{R}=\left(I_{\max}+\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{t-T/2}{\tau}}-\frac{E}{R}$$

Remarque : $i(T)=I_{\min}=\left(I_{\max}+\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}}-\frac{E}{R}\quad(2)$

Des équations (1) et (2), on déduit $I_{\max}$ et $I_{\min}$:

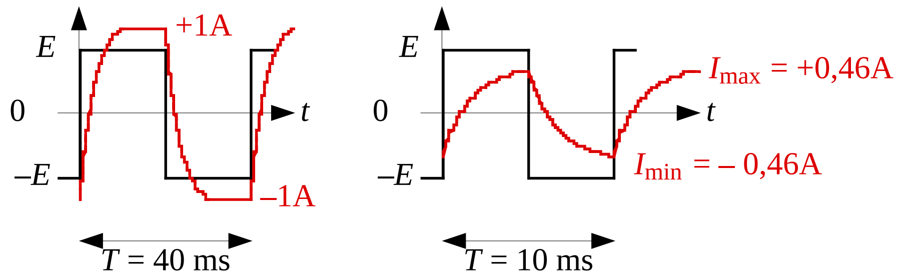
$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & I_{\max}-\frac{E}{R}=\left(I_{\min}-\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}}\\ (2)\quad & I_{\min}+\frac{E}{R}=\left(I_{\max}+\frac{E}{R}\right)e^{-\frac{T}{2\tau}}\end{aligned}\right\}$$

Pour résoudre ce système, posons : $a=\dfrac{E}{R}$ et $b=e^{-\frac{T}{2\tau}}$. Il vient :

$$\left.\begin{aligned}(1)\quad & I_{\max}-a=\left(I_{\min}-a\right).b\\ (2)\quad & I_{\min}+a=\left(I_{\max}+a\right).b\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}& I_{\max}=a\frac{1-b}{1+b}\approx 0{,}46\ \text{A}\\ & I_{\min}=-I_{\max}\end{aligned}\right.$$

A.N. :

t [ms]	0	5	10	15	20
i [A]	-0,46	0,46	-0,46	0,46	-0,46



3) ***Par solution approchée :***

En haute fréquence, le filtre LR est intégrateur. L'impédance de la bobine devient très supérieure à la résistance, de sorte que l'on peut négliger la tension aux bornes de la bobine par rapport à la tension aux bornes de la résistance. La loi des mailles se simplifie en $v_e\approx L\dfrac{di}{dt}$, soit $i=\dfrac{1}{L}\int v_e.dt$.

Comme v_e = c^{te}, on peut assimiler les arcs d'exponentielles à des droites :

cas a : $v_e=E$

$$\left.\begin{aligned}& i=\frac{1}{L}\int E.dt\\ & i(0)=I_{\min}\end{aligned}\right\}\Rightarrow i=\frac{E}{L}t+I_{\min}\quad\Rightarrow i\left(\frac{T}{2}\right)=I_{\max}=\frac{E}{L}\frac{T}{2}+I_{\min}$$

Or, par raison de symétrie, le courant moyen est nul, donc $I_{\min}=-I_{\max}$.

Donc : $I_{\max}=\dfrac{E}{L}\dfrac{T}{2}-I_{\max}\Rightarrow I_{\max}=\dfrac{E}{L}\dfrac{T}{4}=0{,}5\ \text{A}$