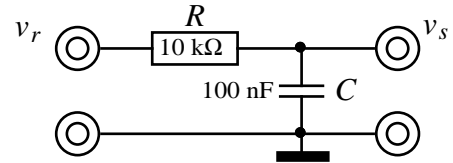


## A22 - Correcteurs analogiques

### 1ère partie : correction d'un système du 1er ordre

But : corriger un système du premier ordre (simulé par un réseau RC) à l'aide de correcteurs P, I, PI, en technologie analogique.

Soit un système électrique dont la fonction de transfert  $H(p)$ , du premier ordre, est connue :



#### 1) Etude du système en boucle ouverte

**Etude théorique :**

- a) Exprimer sous forme normalisée  $H(p)$  en fonction de la constante de temps  $\tau$  du système.  
A.N. : calculer  $\tau$ .

**Etude expérimentale :**

- Réponse à un signal carré (réponse indicielle) :  $v_r(t)$  = signal carré symétrique, amplitude crête à crête  $\Delta v_r = 2 \text{ V}$ ,  $f = 40 \text{ Hz}$ .

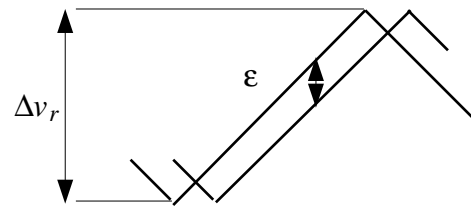
- b) Imprimer  $v_s(t)$ . Rapidité : mesurer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ . Vérifier que :  $t_r \approx 3\tau$ .

c) Précision : visualiser l'erreur  $\epsilon(t) = v_r(t) - v_s(t)$  à l'oscilloscope. Que vaut (en volts) l'écart statique  $\epsilon$  ? En déduire sa valeur définie en pourcentage par :  $\epsilon_{01} = \frac{\epsilon}{\Delta v_r}$ .

- Réponse à un signal triangulaire :  $v_r(t)$  = signal triangulaire symétrique,  $\Delta v_r = 2\text{V}$  crête à crête,  $f = 40 \text{ Hz}$ .

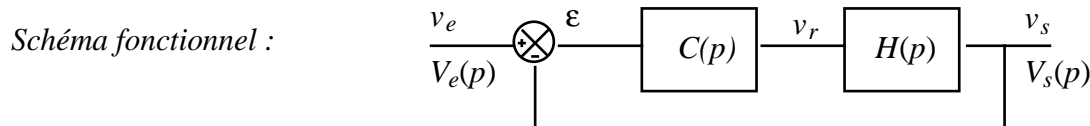
- d) Visualiser  $v_s(t)$ . Y a-t-il erreur de pente ?

- e) Mesurer (en pourcentage) l'erreur de traînage  $\epsilon_{02} = \frac{\epsilon}{\Delta v_r}$



\*\*\*\*\*

Ce système est inséré dans une boucle de régulation à retour unitaire, comprenant un correcteur dont la fonction de transfert sera notée  $C(p)$ .



$T(p) = C(p) \cdot H(p)$  fonction de transfert de la chaîne directe en boucle ouverte.

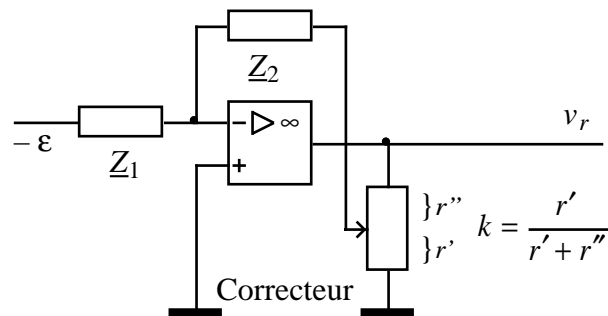
$F(p) = \frac{V_s(p)}{V_e(p)}$  fonction de transfert en boucle fermée.

f) Schéma de principe du correcteur : c'est un amplificateur inverseur à gain réglable :

Soit  $k$  le rapport de division de tension du potentiomètre. En supposant que ce potentiomètre fonctionne presque à vide, montrer que :

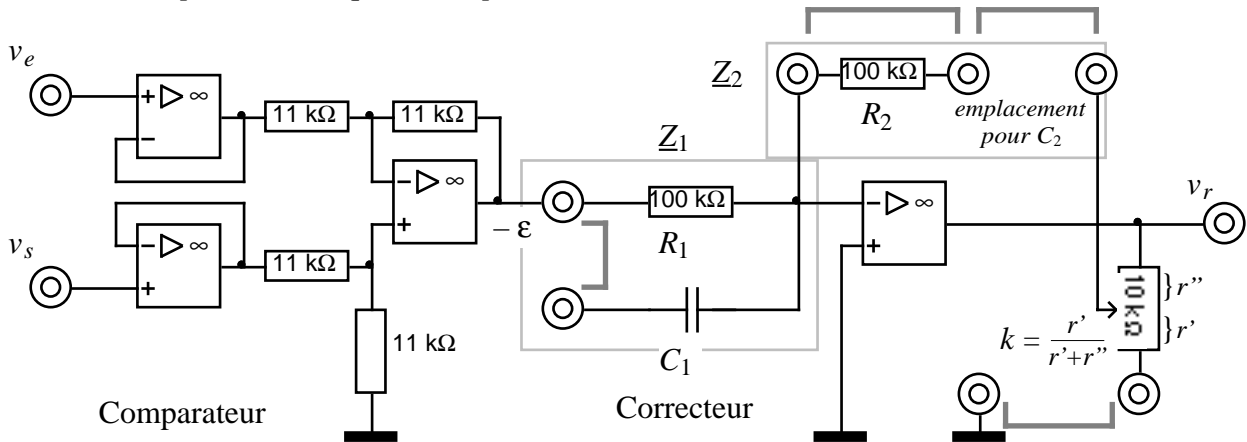
$$C(p) = \frac{v_r}{\epsilon} = \frac{1}{k} \frac{Z_2}{Z_1}$$

Par la suite, on pose :  $K = \frac{1}{k}$  (gain statique)



**Réglage du gain statique :** le réglage de  $k$  s'effectuera à l'aide d'un ohmmètre connecté entre le curseur du potentiomètre (5 kΩ, 10 tours) et la masse. Pour cela, il ne faut pas que le potentiomètre soit relié au reste du circuit ⇒ ôter momentanément les cavaliers pour faire la mesure.

*Schéma complet de la maquette comparateur + correcteur* ( : cavaliers)

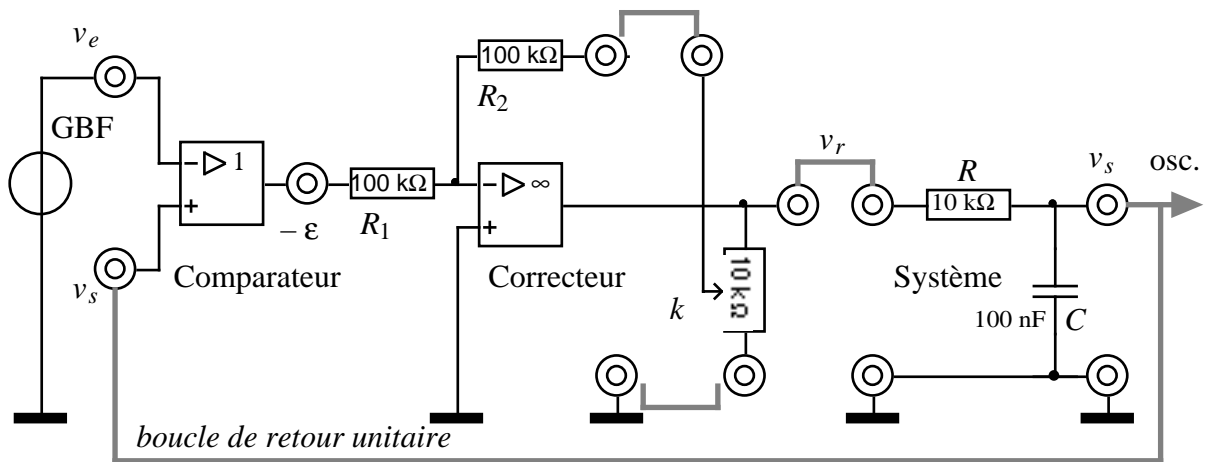


**Remarque :** pour éliminer le signe - introduit par l'amplificateur inverseur, le comparateur exécute en réalité l'opération  $v_s - v_e = -\epsilon$  ⇒ pour visualiser l'erreur, il faut inverser l'entrée de l'oscilloscope.

**2) Correction proportionnelle P :  $C(p) = K$**

Soit :  $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  ; on choisit  $K = 5 \Leftrightarrow k = 0,20$ .

Montage complet (le câblage des masses n'est pas représenté) :



**Etude théorique :**

- a) Exprimer  $T(p)$ .
- b) Exprimer  $F(p)$  en fonction de  $\tau$  et  $K$ . A.N. : calculer les valeurs du gain statique, noté  $K_F$ , et de la constante de temps, notée  $\tau_F$ , de  $F$ .

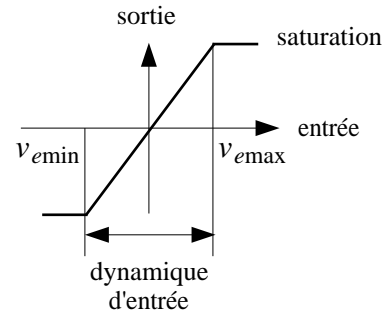
**Etude expérimentale :**

**Réponse à un signal carré (réponse indicielle) :**  $v_e(t)$  = signal carré symétrique,  $\Delta v_e = 2V$  crête à crête,  $f = 40 \text{ Hz}$ .

- c) Imprimer  $v_s$ . Mesurer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ . En déduire  $\tau_F$ . Comparer  $\tau_F$  à  $\tau$ .
- d) Visualiser l'erreur  $\epsilon(t)$  à l'oscilloscope. Mesurer (en volts) l'écart statique  $\epsilon$  et exprimer celui-ci en pourcentage par :  $\epsilon_{01} = \frac{\epsilon}{\Delta v_e}$ . Justifier sa valeur.

e) Mesurer la dynamique admissible en entrée.

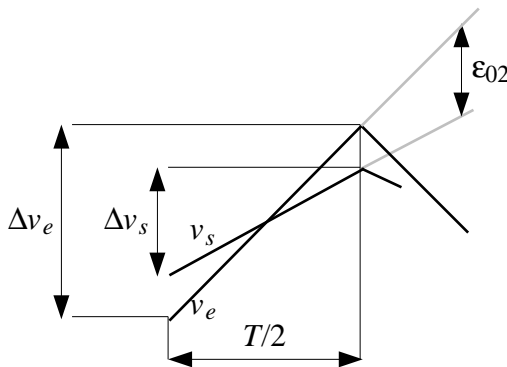
La «dynamique d'entrée» est le plus grand intervalle  $\Delta v_e = v_{e\max} - v_{e\min}$  de variation possible de  $v_e$ , en dehors duquel le système sature (saturation de  $\epsilon$  et/ou de  $v_r$  : il faut visualiser ces deux tensions).



Réponse à un signal triangulaire :  $v_e(t)$  = signal triangulaire symétrique,  $\Delta v_e = 2V$  crête à crête,  $f = 40$  Hz.

f) Visualiser  $v_s(t)$ . Que vaut (en %) l'erreur sur la pente  $\Delta p/p$  ?

Méthode de calcul :



$$\left. \begin{aligned} p_e &= \frac{\Delta v_e}{\frac{T}{2}} \\ p_s &= \frac{\Delta v_s}{\frac{T}{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\Delta p}{p} = \frac{p_e - p_s}{p_e} = 1 - \frac{\Delta v_s}{\Delta v_e}$$

g) L'erreur  $\epsilon_{02}$  en régime permanent est-elle finie ou infinie ?

Variations de  $K$  (par variation de  $k$ ) :

Faire varier  $K$  pour observer qualitativement comment varie le temps de réponse à 5% et la dynamique.

### 3) Correction Intégrale I :

Etude théorique :

a) On pose :  $K = 1/k$  ;  $T_i = R_1 C_2$ . Exprimer  $C(p)$  en fonction de  $K$  et  $T_i$  (schéma ci-contre).

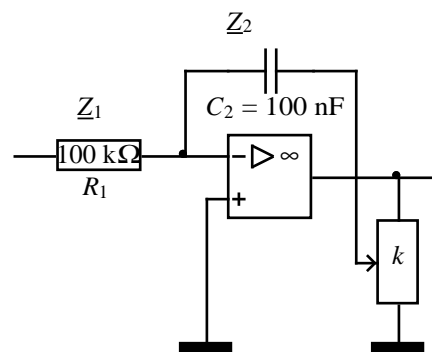
b) Exprimer  $T(p)$ .

c) Donner l'allure des diagrammes asymptotiques de gain et de phase de  $T(p)$ .

On pose :  $F_i = 1/2\pi T_i$  (fréquence propre du correcteur) et  $F_s = 1/2\pi\tau$  (fréquence propre du système). Indiquer les valeurs numériques de  $F_i$  et  $F_s$  sur ces diagrammes.

d) Calculer  $K$  pour avoir une "marge de phase" de  $45^\circ$  (suivre explications en séance).

e) Exprimer  $F(p)$  ; en déduire les expressions de  $m$  et  $\tau_0$  en fonction de  $T_i$ ,  $K$  et  $\tau$ . A.N



Rappel : fonction de transfert principale du second ordre :  $\frac{1}{1 + 2m\tau_0 p + \tau_0^2 p^2}$

**Etude expérimentale :**

Régler le rapport  $k$  pour avoir  $K = 10$  (rappel :  $k = 1/K$ ).

Réponse à un signal carré :  $v_e(t)$  : signal carré symétrique, 2V crête à crête,  $f = 40$  Hz.

- f) Imprimer  $v_s$ . Mesurer le dépassement (en %). Déterminer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ . Justifier les valeurs mesurées (voir formulaire, cours §A14).  
 g) Visualiser l'erreur. En déduire la valeur de  $\epsilon_{01}$ . Conclusion ?  
 h) Mesurer la dynamique d'entrée.

Réponse à un signal triangulaire :  $v_e(t)$  : signal triangulaire symétrique, 2V crête à crête,  $f = 40$  Hz.

- i) Visualiser la tension de sortie  $v_s$  : y a-t-il une erreur de pente ?

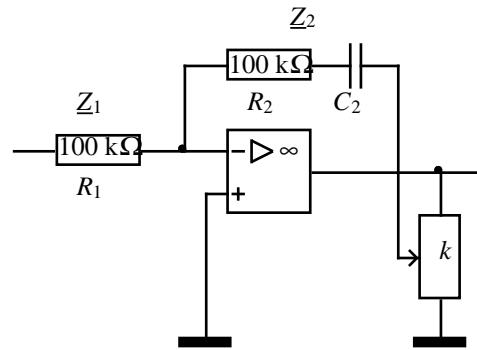
j) Mesurer l'erreur  $\epsilon_{02} = \frac{\epsilon}{\Delta v_e}$ . Conclusion.

Variations de  $K$  (par variation de  $k$ ) :

Visualiser la réponse à un signal carré en faisant varier  $K$ . Conclusion.

**4) Correction Proportionnelle Intégrale PI****Etude théorique :**

- a) On pose :  $K = 1/k$  ;  $T_i = R_1 C_2$ . Exprimer  $C(p)$  en fonction de  $K$  et  $T_i$  (schéma ci-contre).  
 b) On choisit un réglage particulier et simple :  $T_i = \tau$ . Exprimer  $T(p)$ . A.N. : calculer  $C_2$  et  $k$  pour avoir  $K = 5$   
 c) Exprimer  $F(p)$  en fonction de  $\tau$  et  $K$ . A.N. : calculer les valeurs du gain statique, noté  $K_F$ , et de la constante de temps, notée  $\tau_F$ , de  $F$ .

**Etude expérimentale :**

Réponse à un signal carré :  $v_e(t)$  : signal carré symétrique, 2V crête à crête,  $f = 40$  Hz.

- d) Imprimer  $v_s$ . Déterminer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ . Mesurer le dépassement. Justifier les valeurs mesurées.  
 e) Visualiser l'erreur. En déduire la valeur de  $\epsilon_{01}$ . Conclusion ?  
 f) Etudier la dynamique d'entrée (visualiser la sortie du correcteur).

Réponse à un signal triangulaire :  $v_e(t)$  : signal triangulaire symétrique, 2V crête à crête,  $f = 40$  Hz.

- g) Visualiser la tension de sortie  $v_s$  : y a-t-il une erreur de pente ?  
 h) Visualiser l'erreur : conclusion sur  $\epsilon_{02}$ .

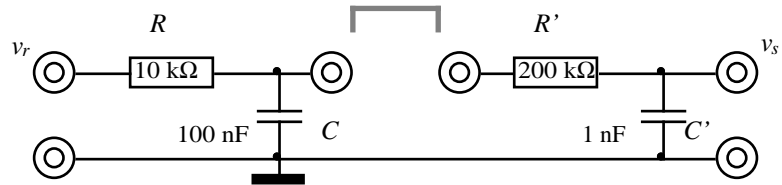
**Tableau récapitulatif**

question	correcteur	temps de réponse	erreur statique	dynamique	dépassement	erreur de pente	erreur de traînage
		$t_r$ (ms)	$\epsilon_{01}$ (%)	$\Delta V_e$ (v)	D (%)	$\Delta p/p$ (%)	$\epsilon_{02}$ (%)
1er o. -1	boucle ouverte						
1er o. -2	correcteur P						
1er o. -3	correcteur I						
1er o. -4	correcteur PI						

## 2ème partie : correction d'un système du 2ème ordre

But : corriger un système du deuxième ordre (simulé par deux réseaux RC) à l'aide de correcteurs PI et PID en technologie analogique.

On connecte maintenant le réseau  $R'C'$  pour constituer un système du deuxième ordre :



### 1) Etude du système en boucle ouverte

#### Etude théorique :

a) On suppose que le courant délivré par la première cellule RC vers la seconde  $R'C'$  est négligeable : par conséquent, la première cellule n'est pas chargée et fonctionne à vide. Exprimer  $H(p)$  en fonction des constantes de temps  $\tau$  et  $\tau'$  du système. A.N. : calculer  $\tau$  et  $\tau'$ . En déduire les expressions de  $m$  et  $\tau_0$ . Application numérique.

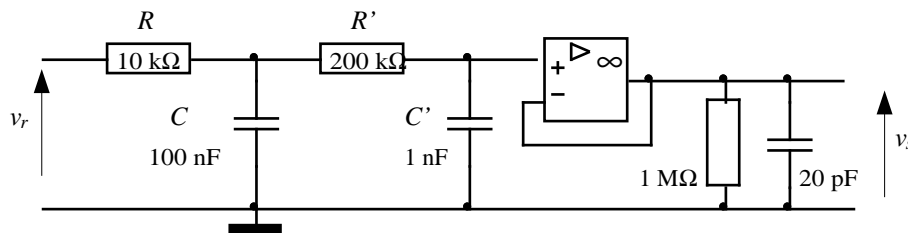
#### Etude expérimentale :

Réponse à un signal carré (réponse indicielle) :  $v_r(t)$  = signal carré symétrique,  $\Delta v_r = 2$  V crête à crête,  $f = 50$  Hz.

b) Imprimer  $v_s$ . Rapidité : mesurer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ .

c) Précision : visualiser l'erreur  $\epsilon(t) = v_r(t) - v_s(t)$  à l'oscilloscope. Que vaut (en volts) l'écart statique  $\epsilon$  ? En déduire sa valeur définie en pourcentage par :  $\epsilon_{01} = \frac{\epsilon}{\Delta v_r}$ .

Remarque : pour que l'impédance d'entrée de l'oscilloscope (qui équivaut à une résistance de  $1$  M $\Omega$  en parallèle avec un condensateur de  $20$  pF) n'influe pas sur le comportement du système, on utilise un amplificateur suiveur comme adaptateur d'impédance :



Réponse à un signal triangulaire :  $v_r(t)$  = signal triangulaire symétrique,  $\Delta v_r = 2$  V crête à crête,  $f = 40$  Hz.

e) Visualiser  $v_s(t)$ . Mesurer l'erreur de pente.

f) Que vaut l'erreur de traînage  $\epsilon_{02}$  ?

### 2) Correction Proportionnelle : $C(p) = 5$

Soit :  $R_1 = R_2 = 100$  k $\Omega$  ;  $k = 0,2$ .

#### Etude théorique :

a) Exprimer  $F(p)$  et en déduire les expressions de  $m$  et  $\tau_0$ . Application numérique.

**Etude expérimentale :**

Réponse à un signal carré :  $v_e(t)$  : signal carré symétrique, 1V crête à crête,  $f = 50$  Hz.

b) Imprimer  $v_s$ . Mesurer le dépassement  $D$  (en %). Mesurer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ .

c) Visualiser l'erreur  $\varepsilon$  et indiquer sa valeur (en %) en régime permanent :  $\varepsilon_{01} = \frac{\varepsilon}{\Delta v_e}$ .

d) Mesurer la dynamique en entrée.

Réponse à un signal triangulaire :  $v_e(t)$  : signal triangulaire symétrique, 1V crête à crête,  $f = 50$  Hz.

e) Visualiser  $v_s(t)$ . Y a-t-il erreur de pente ?

f) Visualiser  $\varepsilon$ . Conclusion sur  $\varepsilon_{02}$  ?

### 3) Correction Proportionnelle et Intégrale PI : $C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$

Le correcteur est réalisé comme précédemment (1ère partie, question 3d) :  $R_1 = R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  ;  $C_2 = 10 \text{ nF}$ .

**Etude théorique :**

a) On choisit d'éliminer la constante de temps la plus longue : on prend donc  $T_i = \tau$ . Exprimer  $T(p)$  dans ces conditions.

b) Donner l'allure du diagramme asymptotique de gain de  $T(p)$ . Calculer  $K$  pour avoir une marge de phase de  $45^\circ$  (même méthode de calcul qu'au § 3 - 1ère partie).

c) Exprimer  $F(p)$  ; en déduire les expressions de  $m$  et  $\tau_0$  en fonction de  $T_i$ ,  $K$  et  $\tau$ . A.N.

**Etude expérimentale :**

Calculer la valeur à donner à  $k$ . Régler  $k$ .

Réponse à un signal carré :  $v_e(t)$  : signal carré symétrique, 1V crête à crête,  $f = 50$  Hz.

d) Imprimer  $v_s$ . Mesurer le dépassement  $D$  (en %) . Déterminer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ .

e) Visualiser l'erreur. En déduire la valeur de  $\varepsilon_{01}$ .

f) Mesurer la dynamique d'entrée.

Réponse à un signal triangulaire :  $v_e(t)$  : signal triangulaire symétrique, 1V crête à crête,  $f = 50$  Hz.

g) Visualiser la tension de sortie  $v_s$  : y a-t-il une erreur de pente ?

h) Visualiser l'erreur : conclusion sur  $\varepsilon_{02}$ .

4) Correction Proportionnelle Intégrale et Dérivée PID

**Etude théorique :**

a) Exprimer  $C(p)$  en fonction de  $K, R_1, R_2, C_1, C_2$ . Montrer que  $C(p)$  a la forme de la fonction de transfert d'un régulateur PID à structure série:

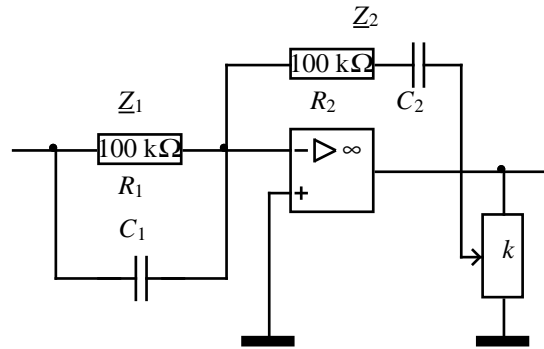
$$C(p) = K \left( 1 + T_d p \right) \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right)$$

(On choisit un réglage simple :  $T_d = R_1 C_1 = \tau$  et  $T_i = R_2 C_2 = \tau'$ , ainsi que :  $K = 2,5$ .)

A. N. : Calculer  $C_1, C_2$  et  $k$ .

b) Exprimer  $T(p)$ .

c) Exprimer  $F(p)$ . A.N. : calculer son gain statique  $K_F$  et sa constante de temps  $\tau_F$ .



**Etude expérimentale :**

Réponse à un signal carré :  $v_e(t)$  : signal carré symétrique,  $f = 50$  Hz.

d) Mesurer la dynamique d'entrée. Constaté que dans ce mode de correction le correcteur travaille presque toujours en tout ou rien en début de correction : expliquer pourquoi. En déduire le choix d'une valeur convenable de l'amplitude crête à crête de  $v_e$  pour qu'il n'y ait pas saturation.

e) Imprimer  $v_s$ . Mesurer le temps de réponse à 5% :  $t_r$ . Mesurer le dépassement. Justifier.

f) Visualiser l'erreur. En déduire la valeur de  $\epsilon_{01}$ . Conclusion ?

Réponse à un signal triangulaire :  $v_e(t)$  : signal triangulaire symétrique, amplitude crête à crête sans changement,  $f = 50$  Hz.

g) Visualiser la tension de sortie  $v_s$  : y a-t-il une erreur de pente ?

h) Visualiser l'erreur : conclusion sur  $\epsilon_{02}$ .

Variations de  $k$  :

En agissant sur  $k$ , observer qualitativement le comportement du régulateur. Conclusion.

**Tableau récapitulatif**

question	correcteur	temps réponse	erreur statique	dynamique	dépassement	erreur de pente	erreur de traînage
		tr (ms)	$\epsilon_{01}$ (%)	$\Delta V_e$ (v)	D (%)	$\Delta p/p$ (%)	$\epsilon_{02}$ (%)
2ème o. -1	boucle ouverte						
2ème o. -2	correcteur P						
2ème o. -3	correcteur PI						
2ème o. -4	correcteur PID						

## Commentaires

*But : corriger un système (du premier ou du second ordre) pour que celui-ci réponde de façon plus rapide aux sollicitations d'entrée (échelon ou rampe) tout en restant stable et sans apporter d'erreur statique.*

### 1ère partie : correction d'un système du 1er ordre

#### 1) Etude du système en boucle ouverte

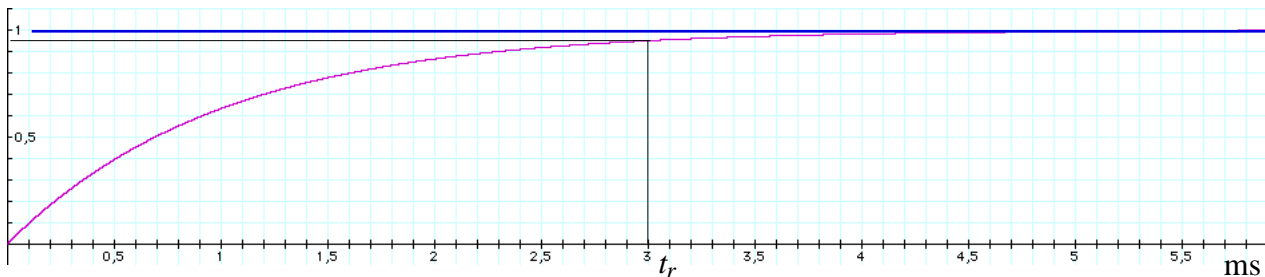
##### Etude théorique :

1a En appliquant la règle du pont diviseur de tension, il vient :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s}{V_r} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \Rightarrow H(p) = \frac{1}{1 + \tau p} ; \text{ avec } \tau = RC = 10^4 \cdot 100 \cdot 10^{-9} = 1\text{ms}$$

Rappel (voir chapitre A14) : Réponse (théorique) à l'échelon unité :  $v_s = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

##### Etude expérimentale :



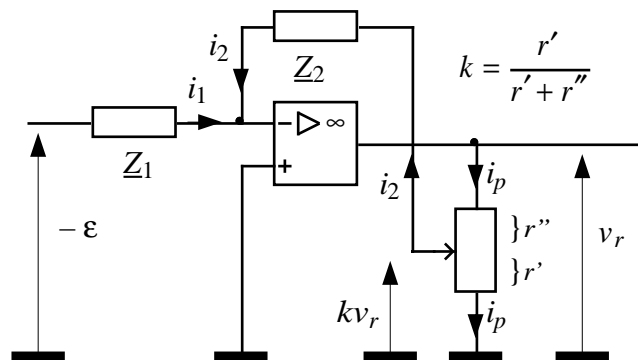
1b  $t_r = 3\tau = 3\text{ ms}$

1c  $\epsilon_{01} = 0$  . Il n'y a pas d'erreur statique car  $H(0) = 1 \Leftrightarrow V_s = V_r$  à fréquence nulle, c'est à dire en courant continu (en régime statique,  $\omega$  ou  $f = 0$ ).

1d  $\Delta p/p = 0$  (pas d'erreur de pente)

1e  $\epsilon_{02} \approx 8\%$

1f On suppose que le courant  $i_p$  qui traverse le potentiomètre est très supérieur au courant  $i_2$  traversant l'impédance  $\underline{Z}_2$  : ce potentiomètre fonctionne presque à vide. Sa tension de sortie au niveau de son curseur vaut donc  $kv_r$ , où  $k$  est le rapport de division de tension.



La méthode de calcul usuelle du gain du montage inverseur par la loi des nœuds s'applique ici en substituant  $kv_r$  à  $v_r$  :

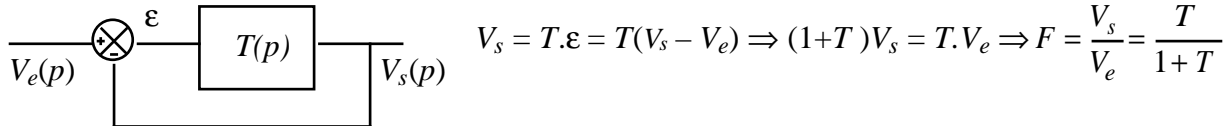
$$i_1 + i_2 = 0 \Rightarrow \frac{-\epsilon}{\underline{Z}_1} + \frac{kv_r}{\underline{Z}_2} = 0 \Rightarrow \underline{C}(j\omega) = \frac{1}{k} \cdot \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1} \text{ soit encore : } C(p) = K \frac{\underline{Z}_2(p)}{\underline{Z}_1(p)}$$

## 2) Correction proportionnelle P : $C(p) = K = 5$

### Etude théorique :

2a Chaîne directe :  $T = C.H = \frac{K}{1 + \tau p}$

2b Calcul de la fonction de transfert en boucle fermée  $F(p)$  d'un système à retour unitaire :



$$V_s = T.\varepsilon = T(V_s - V_e) \Rightarrow (1+T)V_s = T.V_e \Rightarrow F = \frac{V_s}{V_e} = \frac{T}{1+T}$$

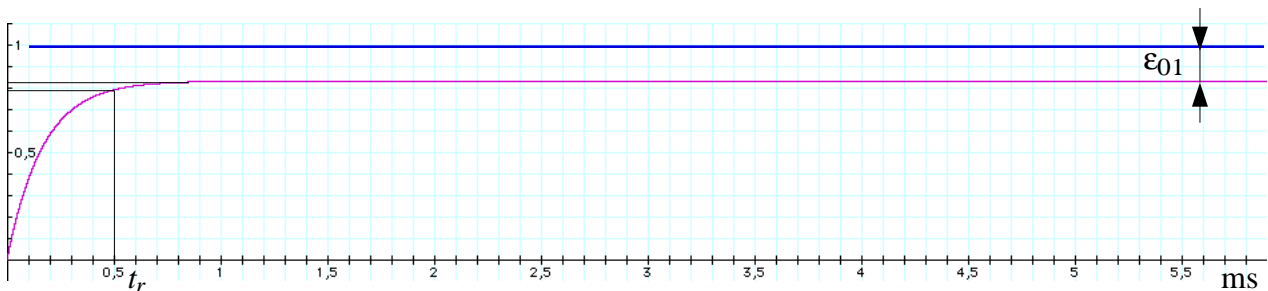
Application : on calcule  $F$  en factorisant le dénominateur de son expression par  $1+K$  :

$$F = \frac{T}{1+T} = \frac{\frac{K}{1+\tau p}}{1+\frac{K}{1+\tau p}} = \frac{K}{K+1+\tau p} = \frac{K}{\underbrace{K+1}_{K_F} + \underbrace{\tau}_{\tau_F} p} = \frac{K_F}{1+\tau_F p}$$

avec  $K_F = \frac{K}{K+1} = \frac{5}{6} = 0,83$  (gain statique) et  $\tau_F = \frac{\tau}{K+1} = \frac{\tau}{6} = 0,167$  ms (constante de temps).

Rappel : réponse à l'échelon unité :  $v_s = K_F \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau_F}} \right) = \frac{5}{6} (1 - e^{-6x})$

### Etude expérimentale :



2c  $t_r = 3\tau = 0,5$  ms

2d En régime statique, par définition, la fréquence est nulle, donc  $\omega = 0$  et  $p = 0$  : la fonction de transfert devient :

$$F = \frac{V_s}{V_e} = K_F$$

On en déduit l'erreur relative commise sur l'amplitude  $\Delta v_s$  du signal de sortie par rapport à l'amplitude  $\Delta v_e$  du signal d'entrée :

$$\varepsilon_{01} = \frac{\varepsilon}{\Delta v_e} = \frac{\Delta v_e - \Delta v_s}{\Delta v_e} = 1 - K_F = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} = 17\%$$

2e  $\Delta v_{e\max} = 2,5$  V (plus grand échelon de tension possible avant saturation du correcteur)

2f  $\Delta p/p = 17\%$  (NB : valeur identique à  $\varepsilon_{01}$ )

2g  $\varepsilon_{02} = \infty$  (plus exactement, l'écart entre  $v_e$  et  $v_s$  tendrait vers l'infini si ces signaux n'étaient pas périodique, puisque les pentes ne sont pas égales)

### Conclusion :

Le système en boucle fermée répond plus rapidement qu'en boucle ouverte (temps de réponse divisé par 6) mais introduit un écart statique important (17% d'erreur).

**3) Correction Intégrale I :****Etude théorique :**

3a D'après la formule obtenus au paragraphe 1, il vient :

$$C = K \frac{Z_2}{Z_1} = K \frac{1}{R_1 C_2 p} = \frac{K}{T_i p} \quad \text{avec } T_i = R_1 C_2 = 10 \text{ ms}$$

$$3b \quad T = C.H = \frac{K}{T_i p} \frac{1}{1 + \tau p}$$

3c On pose :

$$F_s = \frac{1}{2\pi\tau} \text{ (système)} = 159 \text{ Hz}$$

$$F_i = \frac{1}{2\pi T_i} \text{ (correcteur)} = 15,9 \text{ Hz}$$

Donc  $T$  s'écrit encore, en notation complexe :

$$\underline{T} = K \frac{1}{j \frac{f}{F_i} 1 + j \frac{f}{F_s}}$$

D'où l'on déduit le gain en dB de la fonction  $\underline{T}$  :

$$G = 20 \log |\underline{T}| = 20 \log K - 20 \log \frac{f}{F_i} - 20 \log \left| 1 + j \frac{f}{F_s} \right|$$

3d On constate que cette fonction est une fonction du second ordre pour  $f \geq F_s$ . Or on sait qu'un système en boucle fermée est stable si et seulement si son gain en valeur linéaire est  $\leq 1$  (ou, en décibels :  $G \leq 0$  dB) dans la bande de fréquence où le système travaille en 2° ordre (ici pour  $f \geq F_s$ ). Il faut donc limiter le gain statique  $K$  à une certaine valeur telle que  $G \leq 0$  pour  $f \geq F_s$ .

Pour déterminer  $K$  on considère le gain de la fonction  $\frac{\underline{T}}{K}$  :

$$G_K = 20 \log \left| \frac{\underline{T}}{K} \right| = -20 \log \frac{f}{F_i} - 20 \log \left| 1 + j \frac{f}{F_s} \right|$$

(NB : dans ce qui suit, pour simplifier, on se limite au diagramme asymptotique de cette fonction). D'après ce qui précède on peut relever ce diagramme d'une quantité égale à  $20 \log K$  telle que :

$$G = 20 \log K + G_K \leq 0 \quad \text{pour } f \geq F_s$$

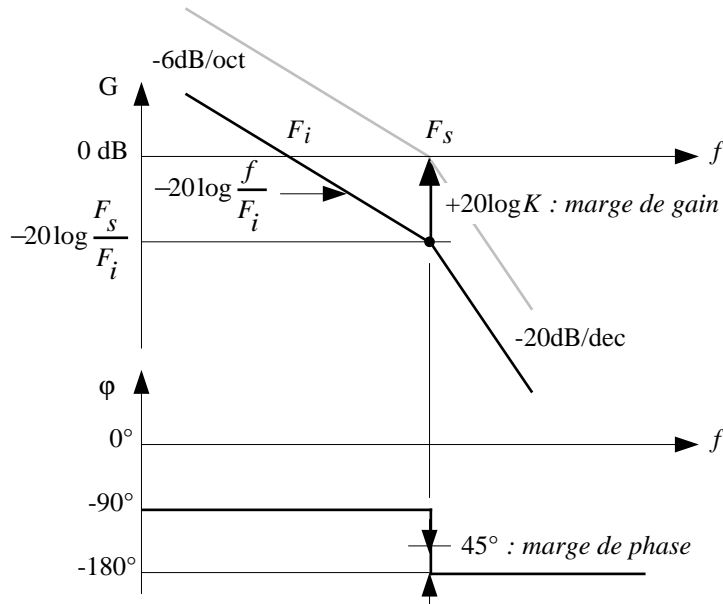
soit, en effectuant ce calcul à partir de l'asymptote du 1er ordre au point d'abscisse  $f = F_s$  :

$$20 \log K - 20 \log \frac{f}{F_i} \leq 0 \Rightarrow K \leq \frac{F_s}{F_i} = \frac{T_i}{\tau} = 10$$

On règle donc le potentiomètre du correcteur à la valeur  $k = 1/K = 0,1$ , ce qui augmente le gain de :

$$\Delta G = 20 \log 10 = 20 \text{ dB}$$

Remarque : au diagramme asymptotique de gain correspond le diagramme asymptotique de phase tel qu'en  $f = F_s$  il existe une marge de  $45^\circ$  entre ce diagramme et l'asymptote à  $-180^\circ$ . Or on sait qu'au-delà d'un déphasage de  $180^\circ$  introduit par le système en boucle fermée celui-ci peut devenir instable. Cette condition de stabilité (marge de phase  $\geq 45^\circ$ ) est équivalente à la condition précédente (marge de gain). Mais comme la valeur de cette marge de phase ( $45^\circ$ ) est toujours la même quelque soit le système considéré, il est d'usage de parler de "marge de phase à  $45^\circ$ " alors que le réglage s'effectue d'après un calcul sur la marge de gain.



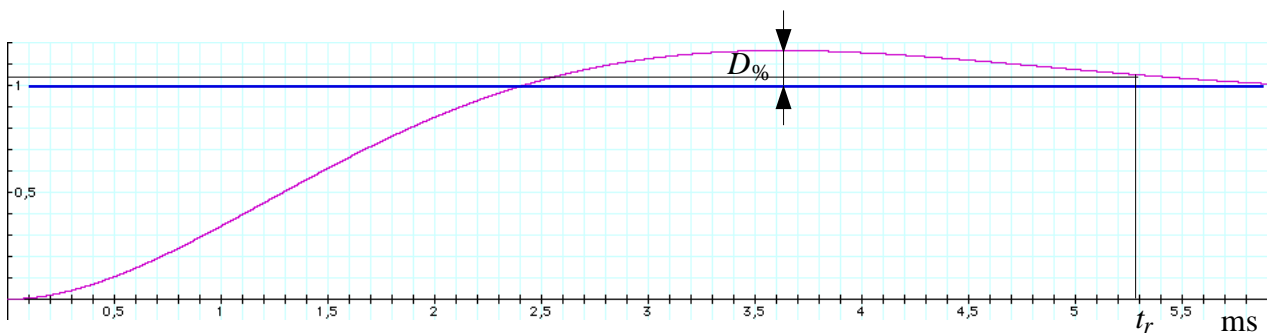
$$3e \quad F = \frac{T}{1+T} = \frac{\frac{K}{T_i p} \frac{1}{1+\tau p}}{1 + \frac{K}{T_i p} \frac{1}{1+\tau p}} = \frac{1}{1 + \frac{T_i}{K} p + \frac{T_i \tau}{K} p^2}$$

Par identification avec la fonction de transfert principale du second ordre, il vient :

$$F = \frac{1}{1 + 2m\tau_0 p + \tau_0^2 p^2} \Rightarrow \begin{cases} \tau_0 = \sqrt{\frac{T_i \tau}{K}} = 1 \text{ ms} \\ m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{T_i}{K\tau}} = 0,5 \end{cases}$$

Rappel : réponse à l'échelon unité ( $m < 1$ ) :  $v_s = 1 - e^{-\frac{m}{\tau_0} t} \left( \cos \sqrt{1-m^2} \frac{t}{\tau_0} + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin \sqrt{1-m^2} \frac{t}{\tau_0} \right)$

Etude expérimentale :



3f mesures :  $t_r = 5,28 \text{ ms}$  ;  $D = 16 \%$

NB : vérification par calcul :  $D = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = 0,16$

3g  $\epsilon_{01} = 0 \%$

3h  $\Delta v_e = 13 \text{ V}$  ; 3i  $\Delta p/p = 0 \%$  ; 3j  $\epsilon_{02} \approx 8 \%$

**Conclusion :**

La correction intégrale pure supprime l'écart statique, au prix d'un temps de réponse excessif qui ne correspond plus au but recherché.

#### 4) Correction Proportionnelle Intégrale PI

##### Etude théorique :

4a En sachant que  $C = K \frac{Z_2}{Z_1}$  et que  $R_1 = R_2$ , il vient :

$$C = K \frac{R_2 + \frac{1}{C_2 p}}{R_1} = K \left( 1 + \frac{1}{R_1 C_2 p} \right) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K \frac{T_i p}{1 + T_i p}$$

4b  $T_i = \tau \Rightarrow T = C.H = K \frac{T_i p}{1 + T_i p} \frac{1}{1 + \tau p} = \frac{K}{\tau p}$

$$T_i = R_1 C_2 = \tau \Rightarrow C_2 = 10 \text{ nF}$$

$$K = 5 \Leftrightarrow k = 0,2$$

4c En factorisant par  $K$  :

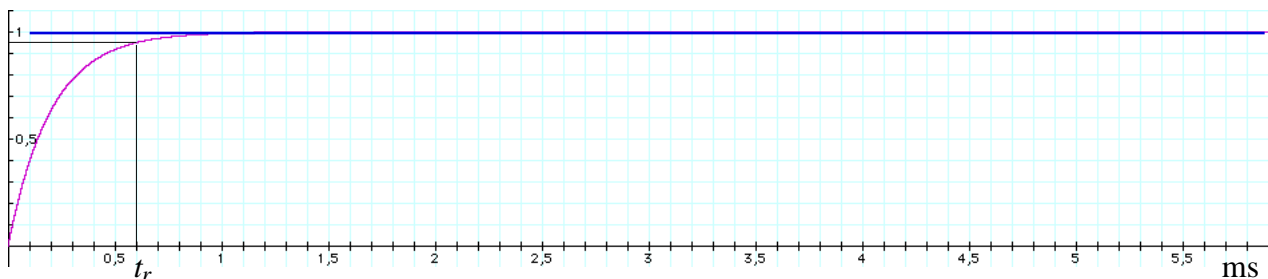
$$F = \frac{T}{1 + T} = \frac{\frac{K}{\tau p}}{1 + \frac{K}{\tau p}} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{\underbrace{K}_{\tau_F}} p}$$

$$\tau_F = \tau/K = 0,2 \text{ ms}$$

$$K_F = 1$$

rappel : réponse à échelon unité :  $v_s = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_F}} = 1 - e^{-5x}$

##### Etude expérimentale :



4d  $t_r = 3\tau = 0,6 \text{ ms}$

$$D = 0 \%$$

4e  $\varepsilon_{01} = 0 \%$

4f  $\Delta v_e = 2,5 \text{ V}$  ; 4g  $\Delta p/p = 0 \%$  ; 4h  $\varepsilon_{02} \approx 1 \%$

##### Conclusion :

La correction PI donne au système en boucle fermée une fonction de transfert du premier ordre de gain statique unité. Le système est donc intrinsèquement stable (1er ordre) et sans erreur statique ( $K_F = 1$ ). En outre le cahier des charges est bien respecté cette fois, puisque le temps de réponse s'en trouve divisé par 5.

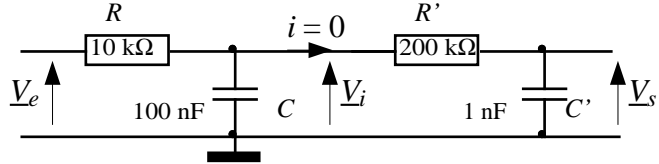
**2ème partie : correction d'un système du 2ème ordre**

**1) Etude du système en boucle ouverte**

**Etude théorique :**

1a Calcul simplifié : application de la règle du pont diviseur de tension si l'on suppose que le courant issue du circuit RC est négligeable :

$$H = \frac{V_s}{V_r} = \frac{V_s}{V_i} \cdot \frac{V_i}{V_r}$$



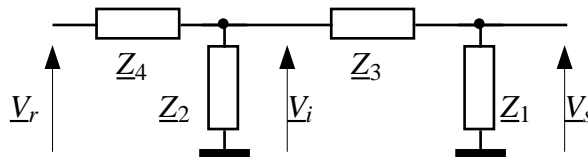
$$\left. \begin{aligned} \frac{V_s}{V_i} &= \frac{1}{1 + RCp} = \frac{1}{1 + \tau p} \\ \frac{V_i}{V_r} &= \frac{1}{1 + R'C'p} = \frac{1}{1 + \tau' p} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H = \frac{1}{(1 + \tau p)(1 + \tau' p)} = \frac{1}{1 + (\tau + \tau')p + \tau\tau'p^2}$$

Avec  $\tau = RC = 1$  ms et  $\tau' = R'C' = 0,2$  ms. Par identification, il vient :

$$H = \frac{1}{1 + 2m\tau_0 p + \tau_0^2 p^2} \Rightarrow \begin{cases} \tau_0 = \sqrt{\tau\tau'} = 0,447 \text{ ms} \\ m = \frac{1}{2} \frac{\tau + \tau'}{\sqrt{\tau\tau'}} = 1,34 \end{cases}$$

**!** Calcul exact : si l'on tient compte du courant débité par la première cellule RC dans la seconde, on obtient la relation (démonstration complète : voir TP A25 page 5) :

$$H = \frac{1}{(1 + Z_4 Y_2)(1 + Z_3 Y_1) + Z_4 Y_1}$$



Avec :  $Z_4 = R$  ;  $Z_3 = R'$  ;  $Y_2 = Cp$  ;  $Y_1 = C'p$ . D'où, en posant  $\tau'' = RC' = 0,01$  ms :

$$H = \frac{1}{(1 + RCp)(1 + R'C'p) + RC'p} = \frac{1}{1 + (\tau + \tau' + \tau'')p + \tau\tau'p^2}$$

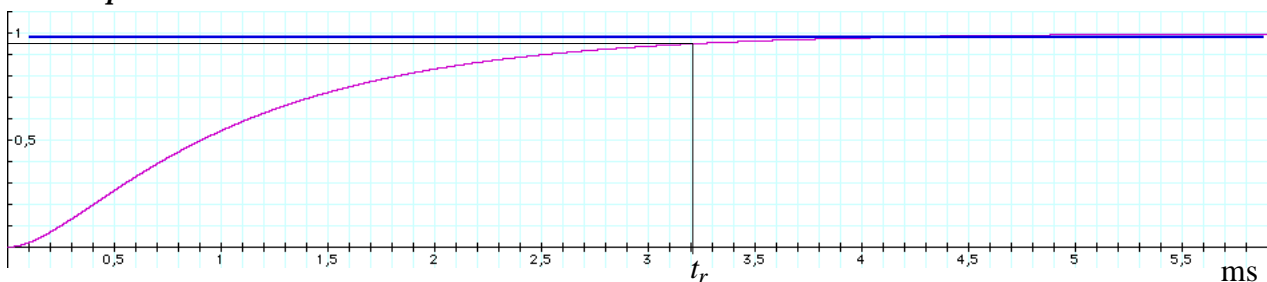
Après identification, on constate que la fréquence propre du système n'est pas modifiée ( $\tau_0$  sans changement), mais que l'amortissement exact est :

$$m = \frac{1}{2} \frac{\tau + \tau' + \tau''}{\sqrt{\tau\tau'}} = 1,35$$

On vérifie que la différence constatée avec la valeur obtenue de façon approchée est négligeable.

Rappel : réponse à l'échelon unité ( $m > 1$ ) :  $v_s = 1 - e^{-\frac{m}{\tau_0} t} \left( \text{ch} \sqrt{m^2 - 1} \frac{t}{\tau_0} + \frac{m}{\sqrt{m^2 - 1}} \text{sh} \sqrt{m^2 - 1} \frac{t}{\tau_0} \right)$

**Etude expérimentale :**



1b  $t_r = 3,21$  ms ; 1c  $\epsilon_{01} = 0$  ; 1d  $\Delta p/p = 0$  ; 1e  $\epsilon_{02} \approx 9$  %

## 2) Correction Proportionnelle : $C(p) = 5$

### Etude théorique :

$$2a \quad T = C.H = \frac{K}{(1 + \tau p)(1 + \tau' p)} = \frac{K}{1 + (\tau + \tau')p + \tau\tau'p^2} \quad \text{avec } K = 5$$

$$F = \frac{T}{1 + T} = \frac{\frac{K}{1 + (\tau + \tau')p + \tau\tau'p^2}}{1 + \frac{K}{1 + (\tau + \tau')p + \tau\tau'p^2}} = \frac{K}{1 + (\tau + \tau')p + \tau\tau'p^2 + K}$$

$$F = \frac{K}{K+1} \frac{1}{1 + \frac{\tau + \tau'}{K+1}p + \frac{\tau\tau'}{K+1}p^2} \quad (\text{après factorisation par } K+1)$$

Par identification avec la forme canonique  $\frac{1}{1 + 2m\tau_0 p + \tau_0^2 p^2}$ , il vient :

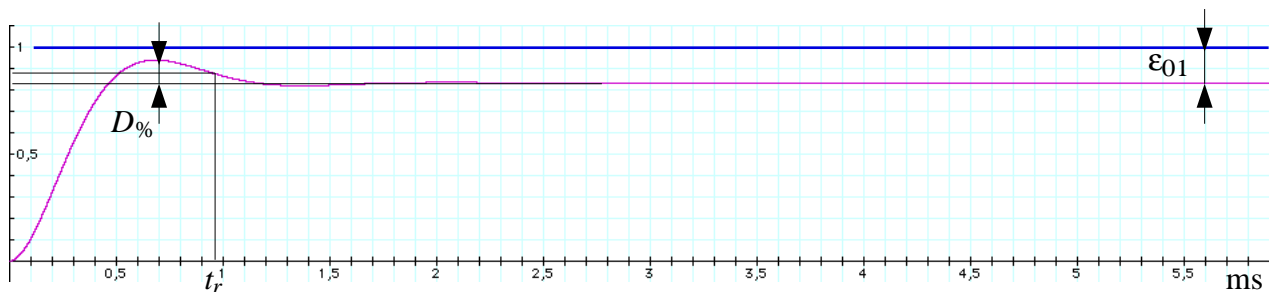
$$K_F = \frac{K}{K+1} = \frac{5}{6} = 0,83$$

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{\tau\tau'}{K+1}} = \sqrt{\frac{\tau\tau'}{6}} = 0,1826 \text{ ms}$$

$$m = \frac{1}{2} \frac{\tau + \tau'}{\sqrt{(K+1)\tau\tau'}} = \frac{1}{2} \frac{\tau + \tau'}{\sqrt{6\tau\tau'}} = 0,548$$

Rappel : réponse à l'échelon unité ( $m < 1$ ) :  $v_s = 1 - e^{-\frac{t}{\tau_0}} \left( \cos \sqrt{1-m^2} \frac{t}{\tau_0} + \frac{m}{\sqrt{1-m^2}} \sin \sqrt{1-m^2} \frac{t}{\tau_0} \right)$

### Etude expérimentale :



L'introduction d'un correcteur P améliore la rapidité du système mais introduit un écart statique et un dépassement :

$$2c \quad t_r = 0,95 \text{ ms} ; D = 13 \%$$

$$\text{NB : vérification par calcul : } D = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = 0,13$$

$$2d \quad \varepsilon_{01} = 17 \%$$

$$\text{NB : vérification par calcul : } \varepsilon_{01} = 1 - K_F = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \approx 0,17$$

$$2e \quad \Delta v_e = 2,5 \text{ V} ; 2f \quad \Delta p/p = 17 \% ; 2g \quad \varepsilon_{02} = \infty$$

### 3) Correction Proportionnelle et Intégrale PI

#### Etude théorique

$$3a \quad C(p) = K \left( 1 + \frac{1}{T_i p} \right) = K \frac{1 + T_i p}{T_i p}$$

$$T = C.H = K \frac{1 + T_i p}{T_i p (1 + \tau p)(1 + \tau' p)}$$

On choisit  $T_i = \tau \Rightarrow T = \frac{K}{\tau p} \frac{1}{1 + \tau' p}$  après simplification par  $1 + \tau p$

3b *diagramme asymptotique et méthode de calcul : voir première partie, §3.*

$$F_i = F_s = \frac{1}{2\pi\tau} = 159 \text{ Hz}$$

$$F'_s = \frac{1}{2\pi\tau'} = 796 \text{ Hz}$$

$$\Rightarrow K \leq \frac{F'_s}{F_s} = \frac{\tau}{\tau'} = 5 \Leftrightarrow k = 0,2$$

$$\Delta G = 20 \log 5 = 14 \text{ dB}$$

$$3c \quad F = \frac{T}{1+T} = \frac{\frac{K}{\tau p} \frac{1}{1 + \tau' p}}{1 + \frac{K}{\tau p} \frac{1}{1 + \tau' p}} = \frac{1}{1 + \frac{\tau}{K} p + \frac{\tau\tau'}{K} p^2}$$

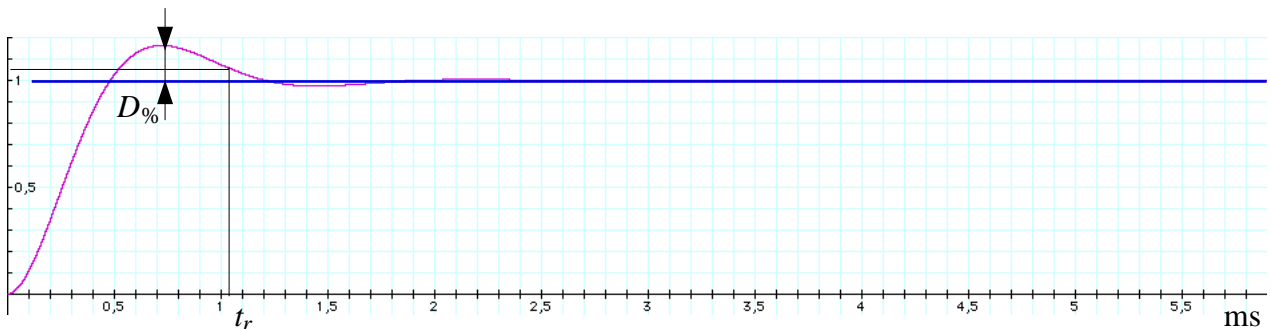
Après identification avec la forme  $\frac{1}{1 + 2m\tau_0 p + \tau_0^2 p^2}$ , il vient :

$$K_F = 1$$

$$m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{K\tau'}} = 0,5$$

$$\tau_0 = \sqrt{\frac{\tau\tau'}{K}} = 0,2 \text{ ms}$$

#### Etude expérimentale :



L'introduction d'un correcteur PI supprime l'écart statique mais n'élimine pas le dépassement :

$$3f \quad t_r = 1,05 \text{ ms} ; D = 16 \% \quad \text{NB : vérification par calcul : } D = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}} = 0,16$$

$$3g \quad \varepsilon_{01} = 0 \%$$

$$3h \quad \Delta v_e = 2 \text{ V} ; 3i \quad \Delta p/p = 0 \% ; 3j \quad \varepsilon_{02} = 2 \%$$

## 4) Correction Proportionnelle Intégrale et Dérivée PID

**Etude théorique :**

$$4a \text{ Rappel : } C(p) = K \frac{Z_2(p)}{Z_1(p)}$$

$$\frac{1}{Z_1} = \frac{1}{R_1} + C_1 p = \frac{1 + R_1 C_1 p}{R_1}$$

$$Z_2 = R_2 + \frac{1}{C_2 p} = \frac{1 + R_2 C_2 p}{C_2 p}$$

$$\Rightarrow C = K \frac{1 + R_1 C_1 p}{R_1} \cdot \frac{1 + R_2 C_2 p}{C_2 p} = K(1 + R_1 C_1 p) \frac{1 + R_2 C_2 p}{R_2 C_2 p} \quad \text{car } R_1 = R_2$$

$C(p)$  est donc bien de la forme  $K(1 + T_d p) \left(1 + \frac{1}{T_i p}\right)$ , avec :

$$T_d = R_1 C_1 = \tau = 1 \text{ ms} \Rightarrow C_1 = 10 \text{ nF}$$

$$T_i = R_2 C_2 = \tau' = 0,2 \text{ ms} \Rightarrow C_2 = 2 \text{ nF}$$

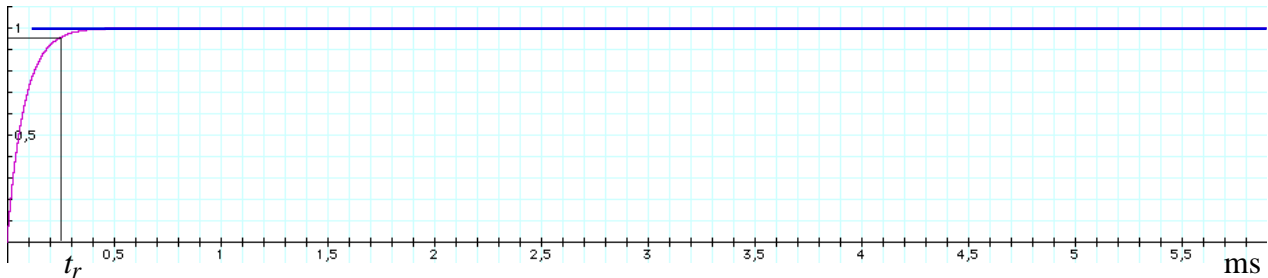
$$\text{et } K = 2,5 \Rightarrow k = 0,4$$

$$4b \quad T = C.H = K(1 + T_d p) \left( \frac{1 + T_i p}{T_i p} \right) \frac{1}{(1 + \tau p)(1 + \tau' p)} = \frac{K}{\tau' p} \text{ après simplifications}$$

$$4c \quad F = \frac{T}{1 + T} = \frac{1}{1 + \frac{\tau'}{K} p}$$

$$K_F = 1$$

$$\tau_F = 0,08 \text{ ms}$$

**Etude expérimentale :**

L'introduction du correcteur PID élimine l'écart statique et le dépassement tout en permettant une réponse très rapide. On constate qu'aux fréquences proposées (40 à 50 Hz) un signal carré traverse la double cellule RC pratiquement sans déformation ! Mais cette performance implique un signal réglant  $v_r$  de très grande amplitude, ce qui limite considérablement la dynamique d'entrée  $\Delta v_e$ .

$$4d \quad t_r = 0,24 \text{ ms}$$

$$D = 0 \%$$

$$4e \quad \epsilon_{01} = 0 \%$$

$$4f \quad \Delta v_e = 0,3 \text{ V} ; 4g \quad \Delta p/p = 0 \% ; 4h \quad \epsilon_{02} = 0,8 \%$$

*Remarque générale* : dans ce qui précède, les différentes réponses à une rampe n'ont pas été détaillées. En valeur absolue, l'erreur  $\epsilon_{02}$  est mesurée comme indiqué ci-dessous lorsqu'il n'y a pas d'erreur de pente - sinon on la considère comme infinie.

⚠  $\epsilon_{02}$  dépend de l'amplitude du signal triangulaire utilisé pour simuler la rampe si on calcule  $\epsilon_{02}$  en valeur relative (%) par rapport à cette amplitude.

