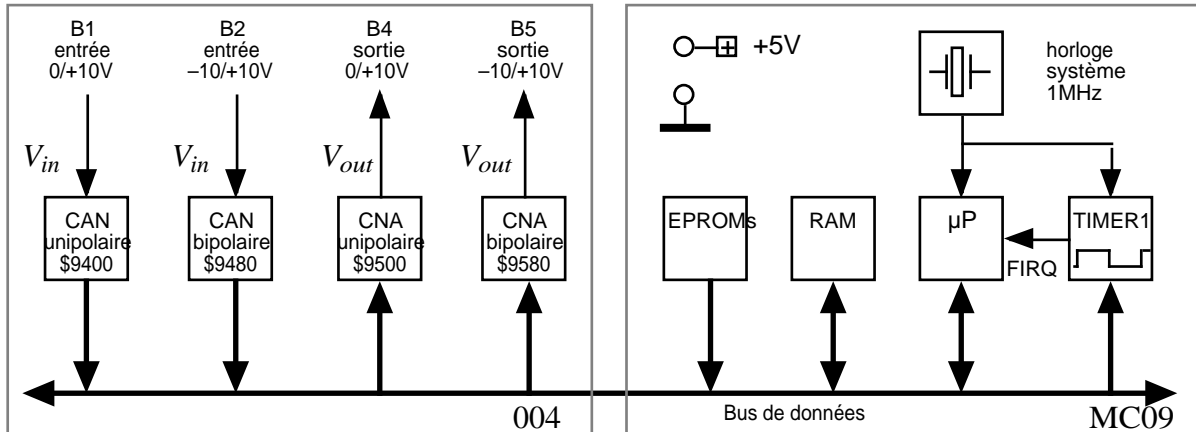


B23 - Filtrage Numérique

But : réaliser par voie numérique la fonction filtrage analogique étudiée précédemment (voir partie A du programme, TP A14). Matériel : identique au TP B15.



I- Filtres non récurrents (filtres à Réponse Impulsionnelle Finie - RIF)

On désire étudier expérimentalement les filtres suivants (voir cours, §B23), avec $T_e = 100\mu s$:

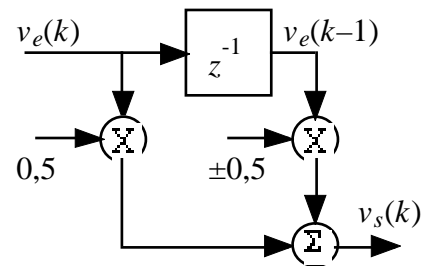
- dérivateur :
$$v_s(k) = \frac{v_e(k) - v_e(k-1)}{2}$$

- interpolateur :
$$v_s(k) = \frac{v_e(k) + v_e(k-1)}{2}$$

Algorithme (du sous-programme d'interruption) :

```

Préchargement timer
Acquisition de ve(k) sur le CAN
Mémoriser ve(k)
vs(k) = [ve(k) ± ve(k-1)]/2
Remplacer, en mémoire, ve(k-1) par ve(k)
Sortie de vs(k) vers le CNA
retour
  
```



Comme précédemment (TP B21 - Discrétisation), et si ce n'est déjà fait, précharger la période d'échantillonnage ($100\mu s$) aux adresses $\$0F00:0F01$. Exécuter le programme $\$AC91$ (soustraction) puis le programme $\$ACBF$ (addition).

1) Réponses en fréquence

a) *Tableaux de mesures* : régler le GBF de façon à fournir une tension $v_e(t)$ sinusoïdale pure d'amplitude 2 volts.

Pour diverses valeurs de f convenablement choisies comprises entre $F_e/200$ et $F_e/2$ (fréquence de Shannon), mesurer pour chaque filtre : $V_{e\text{eff}}$, $V_{s\text{eff}}$. Calculer $|T| = \frac{V_{s\text{eff}}}{V_{e\text{eff}}}$ puis $G_{\text{dB}} = 20 \log |T|$.

Remplir deux tableaux de mesures : f , ω , V_e , V_s , $|T|$, G .

Faire de même en mesurant le déphasage ϕ de v_s par rapport à v_e , pour l'interpolateur uniquement : tableau ϕ ($^\circ$), ϕ (rad), Δt

$$\text{Rappel : } v(t) = A \sin(\omega t + \phi) = A \sin\left[\omega\left(t + \frac{\phi}{\omega}\right)\right] = A \sin[\omega(t + \Delta t)] \Rightarrow \Delta t = \frac{\phi}{\omega}$$

b) *Courbes de gain* : tracer sur un même graphe semi-logarithmique les courbes de gain $G(f)$. Relever graphiquement les fréquences de coupure (F_c) à -3 dB.

c) *Asymptotes* : tracer les asymptotes des courbes relevées. Quelles sont leurs pentes ?

d) *Calcul théorique de la fonction de transfert du filtre dérivateur* :

Sachant que, en régime harmonique : $v_s(k) = \frac{v_e(k) - v_e(k-1)}{2} \Rightarrow \underline{V}_s(k) = \frac{V_e(k) - V_e(k-1)}{2}$ avec

$\underline{V}_e(k-1) = \underline{V}_e(k) e^{-j\omega T_e}$, établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_s(k)}{V_e(k)}$.

Montrer que le gain de ce filtre est : $G = 20 \log \left| \sin \pi \frac{f}{F_e} \right|$ (rappel : $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$).

e) *Calcul théorique de l'asymptote oblique du filtre dérivateur* :

Sachant que $\sin x \approx x$ lorsque $x \rightarrow 0$, en déduire l'équation $G(f)$ de cette asymptote.

A quelle fréquence F_0 coupe-t-elle l'axe des abscisses ?

f) *Fréquence de coupure* : en agissant sur la valeur de préchargement du timer, faire varier pour l'un des filtres la période d'échantillonnage (par ex. : 200 μ s). Vérifier que la fréquence de coupure du filtre reste proportionnelle à F_e . Sachant que $\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, en déduire la relation qui lie F_c à F_e .



La valeur de T_e ne peut être inférieure au temps d'exécution du sous-programme d'interruption. En tout état de cause, garder $T_e \geq 80 \mu$ s.

g) *Courbes de phase* : à partir du tableau de mesure (question a), tracer en échelle linéaire la courbe de phase $\varphi(f)$ de l'un des deux filtres. Conclusion : de quelle forme est la relation $\varphi(f)$?

h) *Décalage horaire* : que peut-on dire du retard pur Δt introduit par le système numérique entre la tension d'entrée et la tension de sortie ?

Conclusion : si Δt est grand (supposition : le μ P est trop lent et le système numérique "rame" !), que devient φ ?

i) *Dynamique d'entrée* : sur le filtre interpolateur, en basse fréquence, augmenter l'amplitude du signal d'entrée pour observer le phénomène de saturation numérique.

En déduire la dynamique d'entrée du filtre.

2) Réponses indicielles

a) Relever, pour chaque filtre, sa réponse indicielle à partir d'un signal logique (GBF sortie TTL).

b) Pour chaque filtre, remplir le tableau :

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
V_e								
V_s								

Vérifier que la réponse du filtre est de durée finie : combien faut-il de périodes d'échantillonnage pour répondre à l'impulsion d'entrée ?

c) Observer pour diverses formes de signaux l'action du filtre dérivateur.

II- Filtre récursif (filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie - RII)

On désire étudier expérimentalement l'équivalent numérique d'un filtre du premier ordre. L'algorithme du filtre est obtenu par simulation approchée par dérivée arrière (voir cours, §B23) :

$$\tau \frac{dv_s(t)}{dt} + v_s(t) = v_e(t) \Rightarrow \tau \frac{v_s(k) - v_s(k-1)}{T_e} + v_s(k) = v_e(k) \Rightarrow v_s(k) = \frac{v_e(k) + \frac{\tau}{T_e} v_s(k-1)}{1 + \frac{\tau}{T_e}}$$

Cet algorithme est récursif, puisque la sortie à l'instant k dépend de sa valeur à l'instant $k-1$.

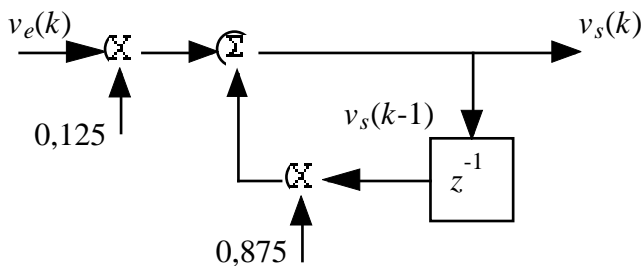
Soit $T_e = 100\mu s$ et $\tau = 700\mu s$ (ces valeurs sont choisies pour se limiter à un algorithme de calcul facile à programmer en langage machine).

Donc : $\frac{\tau}{T_e} = 7 \Rightarrow v_s(k) = 0,125.v_e(k) + 0,875.v_s(k-1)$

Algorithme (du sous-programme d'interruption) :

```

Préchargement timer
Acquisition de u(k) sur le CAN
vs(k) = [ve(k) + 7* vs(k-1)]/8
remplacer, en mémoire, vs(k-1) par vs(k)
Sortie de vs(k) vers le CNA
retour
    
```



NB : en binaire, une division par 8 est obtenue facilement par trois décalages à droite successifs (soit trois divisions par 2). Par exemple :

$$12/2 = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & 1 & 0 \\ \hline \end{array} = 6$$

La multiplication par 7 est exécutée par l'instruction MUL.

- a) Exécuter le programme \$ACED. Relever la courbe de gain.
- b) Mesurer la fréquence de coupure. Sachant que $\tau = 700\mu s$, quelle serait le fréquence de coupure du filtre analogique correspondant ?
- c) Relever la réponse indicielle à partir d'un signal logique. Celle-ci est-elle réellement "infinie" ? Estimer le nombre de périodes d'échantillonnage nécessaires pour atteindre 100% de la réponse.
- d) Calculer les 5 premières valeurs de la réponse à un échelon unité ($v_e = 1$ pour $t > 0$) :

k	-1	0	1	2	3	4	5
v_e							
v_s							

e) Calcul théorique de la courbe de gain (méthode approchée)

Sachant que, en régime harmonique :

$$v_s(k) = 0,125v_e(k) + 0,875v_s(k-1) \Rightarrow \underline{V}_s(k) = 0,125\underline{V}_e(k) + 0,875\underline{V}_s(k-1)$$

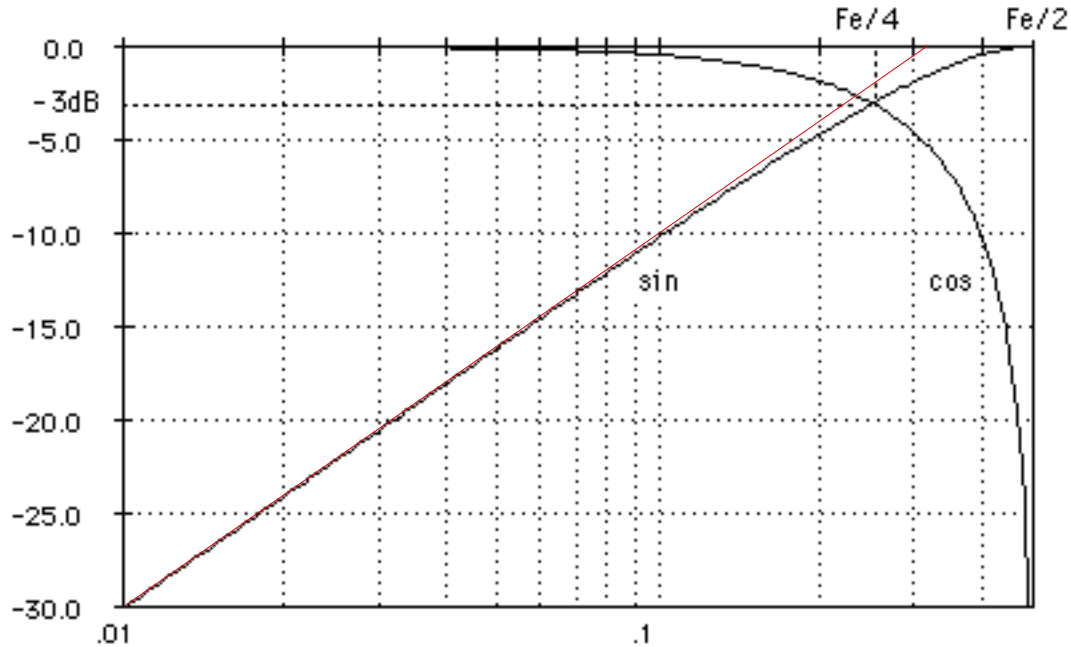
avec $\underline{V}_s(k-1) = \underline{V}_s(k).e^{-j\omega T_e}$, établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ de ce filtre puis de son gain en dB. En déduire sa fréquence de coupure à $-3dB$.

Commentaires

I- Filtres non récursifs (filtres à Réponse Impulsionnelle Finie - RIF)

Rappel : Fréquence maxi du signal : $T_e = 100\mu\text{s} \Rightarrow f_{\text{max}} = \frac{F_e}{2} = 5\text{kHz}$

b)



Filtre dérivateur :

* - filtre non récursif, soustraction
 * - T_e , entrée/sortie, adr mémoire : idem \$AC73 (TP B21)
 * (variable interne : \$0F02 : table des $u(k)$)
 *

AC91 30 8D 00 10	prog6	LEAX	spg6,PCR	adr s-p d'interruption
AC95 BF 0F 66		STX	vfirq	vecteur d'interruption
AC98 86 F2		LDA	#\$F2	initialisation TIMER 1
AC9A BE 0F 00		LDX	\$0F00	
AC9D BD A8 80		JSR	itimer	
ACA0 3C BF	loop6	CWAI	##10111111	autorisation et attente
ACA2 20 FC		BRA	loop6	d'interruption
ACA4 3F		SWI		
ACA5 BF 88 02	spg6	STX	drtim1	6 μs démarrage décompteur
ACA8 CE 0F 02		LDU	#\$0F02	6 adr table des $u(k)$
ACAB B6 94 80		LDA	can_bi	5 acquisition $u(k)$
ACAE 88 80		EORA	##10000000	2 bin décalé -> comp 2
ACB0 A7 41		STA	1,U	5 sauve $u(k)$ à adr U+1
ACB2 A0 C4		SUBA	,U	4 $u(k) - u(k-1)$
ACB4 47		ASRA		2 div par 2, avec signe
ACB5 E6 41		LDB	1,U	5 copie $u(k)$ à adr U
ACB7 E7 C4		STB	,U	4
ACB9 88 80		EORA	##10000000	2 comp 2 -> bin décalé
ACBB B7 95 80		STA	cna_bi	5
ACBE 3B		RTI		



Il est important que le sous-programme d'acquisition et de calcul s'exécute en un temps

inférieur ou égale à la période d'échantillonnage (100 μ s), qui est par construction la période des interruptions. Ici on calcule : $\Delta t = 6+6+5+2+5+4+2+5+4+2+5 = 46 \mu$ s auquel il faut ajouter le temps d'exécution de l'appel du sous-programme d'interruption par l'instruction CWAI (une vingtaine de μ s) et de son retour par RTI (6 μ s).

⚠ Le code signé employé par le microprocesseur pour effectuer des calculs arithmétiques est le code complément à 2. Or les CAN et CNA bipolaires travaillent en code binaire décalé : il faut donc passer d'un code à l'autre. Cela s'effectue par les instructions EOR qui change l'état du bit de signe (bit de poids fort) : cf cours chap B11

⚠ En binaire, une division par 2 s'effectue par un simple décalage à droite (instruction ASR)

⚠ Le rôle de cette division par 2 est de conserver une pleine échelle constante entre l'entrée et la sortie du filtre, la somme algébrique de deux tensions comprises entre -10 et +10V pouvant conduire à un résultat compris (au plus) entre -20 et +20V.

1) Réponses en fréquence

d) Algorithme :

$$v_s(k) = \frac{v_e(k) - v_e(k-1)}{2}$$

Fonction de transfert :

$$\left. \begin{array}{l} \underline{V}_s(k) = \frac{\underline{V}_e(k) - \underline{V}_e(k-1)}{2} \\ \underline{V}_e(k-1) = \underline{V}_e(k) \cdot e^{-j\omega T_e} \end{array} \right\} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s(k)}{\underline{V}_e(k)} = \frac{1 - e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Gain :

$$\left. \begin{array}{l} G = 20 \log |H(j\omega)| \\ e^{-j\omega T_e} = \cos \omega T_e - j \sin \omega T_e \\ 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} \end{array} \right\} \Rightarrow G = 20 \log \left| \sin \frac{\omega T_e}{2} \right|$$

f) Fréquence de coupure :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\omega T_e}{2} = \pi \frac{f}{F_e} \\ G = -3 \text{dB} \Leftrightarrow \left| \sin \frac{\omega T_e}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{array} \right\} \Rightarrow F_c = \frac{F_e}{4} = 2,5 \text{ kHz}$$

c) Asymptote :

$$\left. \begin{array}{l} \text{pour } f \ll F_e : \frac{f}{F_e} \rightarrow 0 \\ \sin x \xrightarrow{x \rightarrow 0} x \end{array} \right\} \Rightarrow G \approx 20 \log \pi \frac{f}{F_e}$$

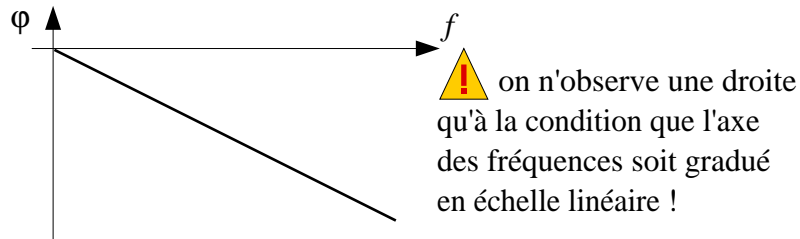
L'asymptote a une pente égale à +6dB/octave : ce filtre est un filtre passe-haut. Elle coupe l'axe des fréquences en :

$$\left. \begin{array}{l} G \approx 20 \log \pi \frac{f}{F_e} \\ G = 0 \Leftrightarrow \pi \frac{f}{F_e} = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow F_0 = \frac{F_e}{\pi} \approx 3,2 \text{ kHz}$$

g) et h) Déphasage : comme pour le programme AC73 (cf TP B21), la lecture du CAN prend en compte le résultat de la conversion précédente, faite pendant l'avant-dernière période d'échantillonnage. Entre l'acquisition de la tension d'entrée v_e et la restitution du calcul en v_s , il s'écoule donc un retard (constant) de l'ordre de $T_r \approx T_e + \Delta t \approx 150 \mu s$.

Ce retard étant fixe, il en résulte un déphasage arrière proportionnel à la fréquence (c'est pourquoi ces filtres sont encore appelés "filtres à phase linéaire") :

$$\sin(\omega t + \varphi) = \sin\left[\omega\left(t + \frac{\varphi}{\omega}\right)\right] = \sin[\omega(t - T_r)] \Rightarrow \varphi = -2\pi T_r \cdot f$$

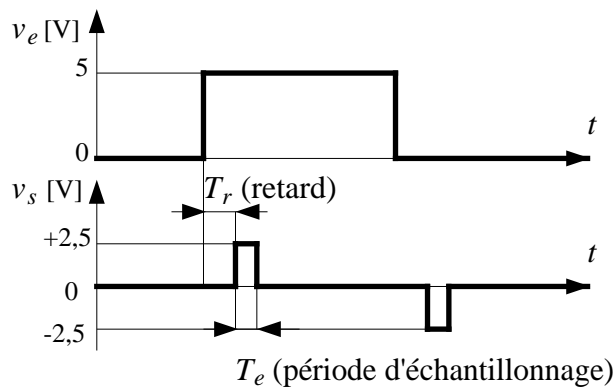


Exemple : à la fréquence de coupure le déphasage vaut : $\varphi = -360.150.10^{-6}.2500 = -135^\circ$

i) Dynamique d'entrée : observation identique au TP B15, §2-2. On trouve ici une dynamique de l'ordre de 20V, la division par 2 permettant de conserver cette valeur de pleine échelle avant saturation numérique.

2) Réponse indicielle

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
v_e [V]	0	0	0	5	5	5	0	0
v_s [V]	0	0	0	2,5	0	0	-2,5	0



Quand le signal d'entrée v_e est constant, la dérivée est nulle et $v_s = 0$. En revanche, sur un front montant de v_e , la dérivée est positive et très grande, correspondant si le front est parfaitement vertical à une impulsion "de Dirac" de hauteur infinie et de durée nulle. Mais le calcul numérique se contente de produire une impulsion de hauteur 2,5V et de durée T_e . Il en est de même pour un front descendant.

Filtre interpolateur :

			* - filtre non récursif, addition
			* - T_e , entrée/sortie, adr mémoire : idem \$AC73 (TP B21)
			*
ACBF 30 8D 00 10	prog7	LEAX spg7,PCR	adr s-p d'interruption
ACC3 BF 0F 66		STX vfirq	vecteur d'interruption
ACC6 86 F2		LDA #\$F2	initialisation TIMER 1
ACC8 BE 0F 00		LDX \$0F00	
ACCB BD A8 80		JSR itimer	
ACCE 3C BF	loop7	CWAI #%10111111	autorisation et attente
ACD0 20 FC		BRA loop7	d'interruption
ACD2 3F		SWI	
ACD3 BF 88 02	spg7	STX drtim1	démarrage décompteur
ACD6 CE 0F 02		LDU #\$0F02	adr table des u(k)
ACD9 B6 94 80		LDA can_bi	acquisition u(k)
ACDC 88 80		EORA #%10000000	bin décalé -> comp 2
ACDE A7 41		STA 1,U	sauve u(k) à adr U+1
ACE0 AB C4		ADDA ,U	u(k) - u(k-1)
ACE2 47		ASRA	div par 2, avec signe
ACE3 E6 41		LDB 1,U	copie u(k) à adr U
ACE5 E7 C4		STB ,U	
ACE7 88 80		EORA #%10000000	comp 2 -> bin décalé
ACE9 B7 95 80		STA cna_bi	
ACEC 3B		RTI	

1) Réponses en fréquence

d) Algorithme :

$$v_s(k) = \frac{v_e(k) + v_e(k-1)}{2}$$

Fonction de transfert :

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_s(k) &= \frac{\underline{V}_e(k) + \underline{V}_e(k-1)}{2} \\ \underline{V}_e(k-1) &= \underline{V}_e(k) \cdot e^{-j\omega T_e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s(k)}{\underline{V}_e(k)} = \frac{1 + e^{-j\omega T_e}}{2}$$

Gain :

$$\left. \begin{aligned} G &= 20 \log |H(j\omega)| \\ e^{-j\omega T_e} &= \cos \omega T_e - j \sin \omega T_e \\ 1 + \cos x &= 2 \cos^2 \frac{x}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = 20 \log \left| \cos \frac{\omega T_e}{2} \right|$$

f) Fréquence de coupure :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega T_e}{2} &= \pi \frac{f}{F_e} \\ G = -3\text{dB} &\Leftrightarrow \left| \cos \frac{\omega T_e}{2} \right| = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_c = \frac{F_e}{4} = 2,5 \text{ kHz}$$

c) Asymptote :

$$f = \frac{F_e}{2} = f_{\max} \Rightarrow |H| = 0 \Rightarrow G \rightarrow -\infty$$

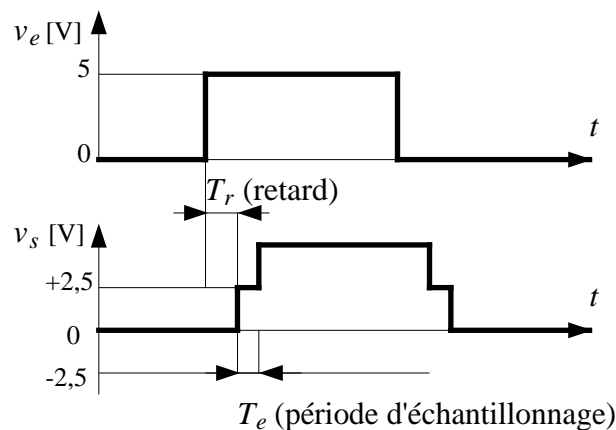
Ce filtre est un filtre passe-bas. L'asymptote est une droite verticale. Elle coupe l'axe des fréquences en $F_0 = 5$ kHz.

g) et h) Déphasage : idem filtre dérivateur. Il s'agit toujours d'un déphasage arrière puisque l'exécution du programme entraîne un retard.

i) Dynamique d'entrée : idem filtre dérivateur.

2) Réponse indicielle

k	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
V_e [V]	0	0	0	5	5	5	0	0
V_s [V]	0	0	0	2,5	5	5	2,5	0



II- Filtre récursif (filtre à Réponse Impulsionnelle Infinie - RII)

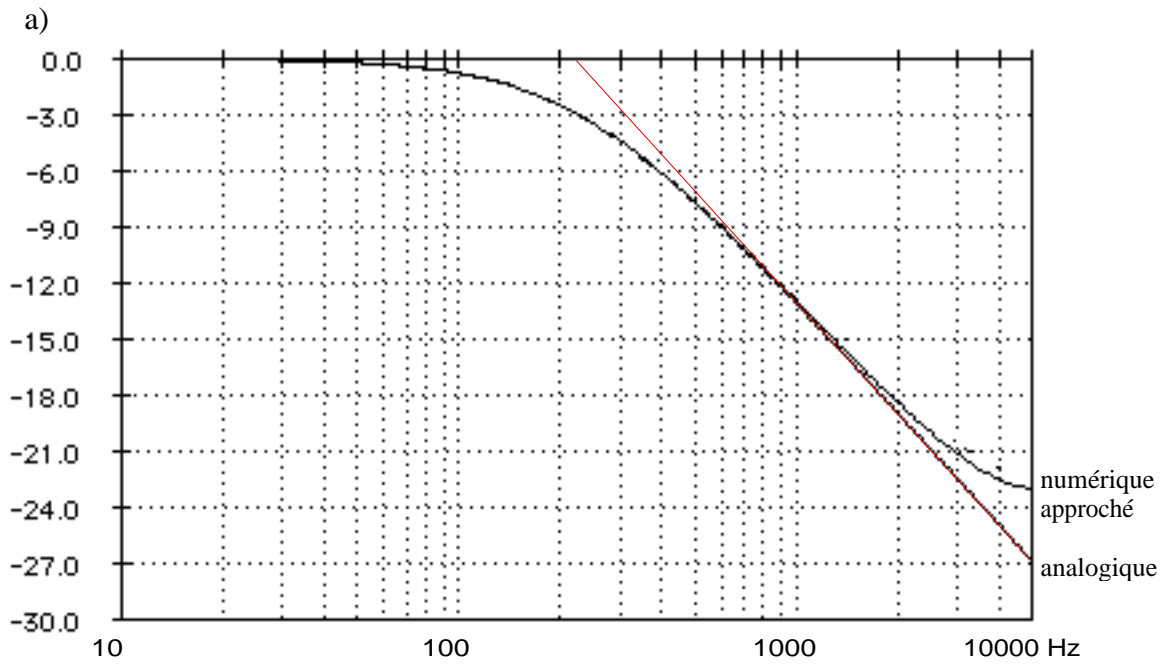
* - filtre récursif

* - T_e , entrée/sortie, adr mémoire : idem \$AC73 (TP B21)

*

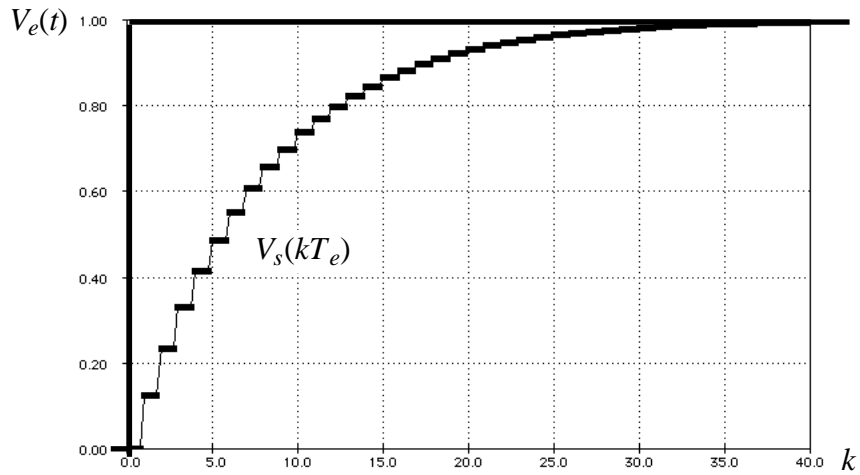
ACED 30 8D 00 10	prog8	LEAX	spg8,PCR	adr s-p d'interruption
ACF1 BF 0F 66		STX	vfirq	vecteur d'interruption
ACF4 86 F2		LDA	#\$F2	initialisation TIMER 1
ACF6 BE 0F 00		LDX	\$0F00	
ACF9 BD A8 80		JSR	itimer	
ACFC 3C BF	loop8	CWAI	##10111111	autorisation et attente
ACFE 20 FC		BRA	loop8	d'interruption
AD00 3F		SWI		
AD01 BF 88 02	spg8	STX	drtim1	démarrage décompteur
AD04 CE 0F 02		LDU	#\$0F02	adr table des u(k)
AD07 6F 41		CLR	1,U	u(0) = 0
AD09 B6 94 80		LDA	can_bi	acquisition u(k)
AD0C A7 42		STA	2,U	sauve u(k) à adr U+1
AD0E A6 C4		LDA	,U	7 x v(k-1) + u(k)
AD10 C6 07		LDB	#\$07	
AD12 3D		MUL		opérations sur 16 bits
AD13 E3 41		ADDD	1,U	
AD15 44		LSRA		division par 8 (/2/2/2)
AD16 56		RORB		
AD17 44		LSRA		
AD18 56		RORB		
AD19 44		LSRA		

AD1A 56	RORB		
AD1B E7 C4	STB	,U	copie de v(k)
AD1D F7 95 80	STB	cna_bi	seul le poids faible est recopié ds le CNA
AD20 3B	RTI		



b) $T_e = 100 \mu s$; $\tau = 7T_e = 700 \mu s \Rightarrow F_{c(analogique)} = 1/2\pi\tau = 227,4 \text{ Hz}$.

c) Réponse à un échelon : en pratique, la réponse n'est pas infinie : on constate ici qu'au-delà de la 35ème période d'échantillonnage, le signal de sortie est quasi identique au signal d'entrée :



d)

k	-1	0	1	2	3	4	5
V_e	0	0	1	1	1	1	1
V_s		0	0,125	0,234	0,330	0,414	0,487

e) Calcul théorique de la courbe de gain (méthode approchée) :

Algorithme :

$$v_s(k) = \frac{v_e(k) + \frac{\tau}{T_e} v_s(k-1)}{1 + \frac{\tau}{T_e}} = \frac{v_e(k) + 7v_s(k-1)}{8}$$

Fonction de transfert :

$$\left. \begin{aligned} \underline{V}_s(k) &= \frac{v_e(k) + 7v_s(k-1)}{8} \\ \underline{V}_s(k-1) &= \underline{V}_s(k) \cdot e^{-j\omega T_e} \end{aligned} \right\} \Rightarrow H(j\omega) = \frac{\underline{V}_s(k)}{\underline{V}_e(k)} = \frac{1}{8 - 7e^{-j\omega T_e}}$$

Gain :

$$\left. \begin{aligned} G &= 20 \log |H(j\omega)| \\ e^{-j\omega T_e} &= \cos \omega T_e - j \sin \omega T_e \end{aligned} \right\} \Rightarrow G = 20 \log \frac{1}{\sqrt{113 - 112 \cos \omega T_e}}$$

Fréquence de coupure :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\omega T_e}{2} &= \pi \frac{f}{F_e} \\ G = -3\text{dB} &\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{113 - 112 \cos \omega T_e}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned} \right\} \Rightarrow F_c = \frac{F_e}{2\pi} \arccos \frac{111}{112} = 213 \text{ Hz}$$

On constate que la fréquence de coupure obtenue diffère légèrement de son équivalent analogique.

Courbe de gain obtenue par la méthode exacte (voir cours B23) :

Fonction de transfert (en $j\omega$ ou en p) du système analogique :

$$H(p) = \frac{1}{1 + \tau p}$$

Fonction de transfert en z du système échantillonné :

$$H_B(z) = \frac{V_s}{V_e} = (1 - z^{-1}) \cdot \mathbf{Z} \left[\frac{H(p)}{p} \right] = \frac{(1 - \alpha) \cdot z^{-1}}{1 - \alpha \cdot z^{-1}} \quad \text{avec } \alpha = e^{-\frac{T_e}{\tau}} = 0,867.$$

Algorithme :

$$V_s - \alpha z^{-1} V_s = (1 - \alpha) z^{-1} V_e \Rightarrow v_s(k) = (1 - \alpha) \cdot v_e(k-1) + \alpha \cdot v_s(k-1)$$



Cet algorithme est plus difficile à implémenter que l'algorithme approché car il faut utiliser des coefficients réels égaux à $\alpha = 0,867$ et $1 - \alpha = 0,133$, ce qui nécessite au minimum un calcul en virgule fixe (code binaire fractionnaire). Un processeur DSP serait plus adapté dans ce cas.

Fonction de transfert en $j\omega$ du système échantillonné :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{1 - \alpha}{e^{j\omega T_e} - \alpha} = \frac{1 - \alpha}{\cos \omega T_e - \alpha + j \sin \omega T_e}$$

Gain :

$$G = 20 \log |\underline{H}(j\omega)| = 20 \log \frac{1 - \alpha}{\sqrt{(\cos \omega T_e - \alpha)^2 + (\sin \omega T_e)^2}} = 20 \log \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 + \alpha^2 - 2\alpha \cos \omega T_e}}$$

Fréquence de coupure à - 3dB : pour $|\underline{H}(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$ le calcul aboutit à :

$$F_{c(\text{numérique})} = \frac{F_e}{2\pi} \arccos \frac{-\alpha^2 + 4\alpha - 1}{2\alpha} = 227,5 \text{ Hz} = F_{c(\text{analogique})}$$