B24 - Fourier

But : acquérir un signal et analyser son spectre.

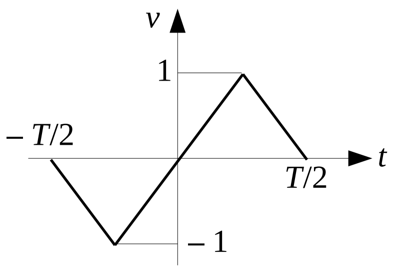
1- Synthèse de Fourier

On désire réaliser la synthèse de différents signaux à partir de la connaissance de l'amplitude et de la phase de leurs harmoniques.

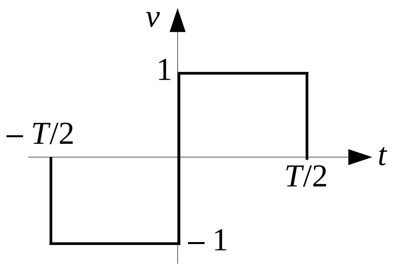
On dispose du programme de calcul (écrit en JAVA) *FourierSynthesis* présenté sur la page *FourierSynthesis_Simulation.htlm* (ouvrir Internet Explorer).

1°) *Utilisation des formules de décomposition en série de Fourier de signaux périodiques.*

On donne ci-dessous les décompositions en série de Fourier d'un signal triangulaire et d'un signal carré d'amplitude 1 V et de période T .



$$v(t) = \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin\left((2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right)$$



$$v(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)}\sin\left((2k+1)\frac{2\pi}{T}t\right)$$

Soit n le rang d'un harmonique ($n \geq 1$). Pour ces signaux, on montre qu'il n'y a pas d'harmoniques de rang pair, ce que l'on traduit en posant : $n = 2k + 1$. D'après les valeurs fournies par ces relations, calculer :

		TRIANGLE			CARRÉ		
k	n	amplitude	val efficace	phase	amplitude	val efficace	phase
0							
1							
2							
3							
4							

Saisir ces données. Exécuter le programme.

Imprimer les graphes obtenus (triangle et carré).

Application :

a) calculer la valeur efficace vraie de ces signaux. *Rappel :*

$$V_{\mathrm{TRMS}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T v^2(t)\,dt}$$

b) calculer la valeur efficace des signaux synthétisés ($n < 10$) par :

$$V_{\mathrm{eff}} = \sqrt{\sum_{n=1}^{9} V_{n_{\mathrm{eff}}}^2}$$

ISBN 2-9520781-1-4

c) calculer leur ***taux d'harmonique ramené au fondamental*** (THD) : $THD = \dfrac{\sqrt{\sum_{n=2}^{9} V_{n\,\text{eff}}^2}}{V_{1\text{eff}}}$

2°) Phénomène de Gibbs *(signal carré uniquement)*

La reconstitution d'un signal présentant une discontinuité nécessite un nombre élevé de termes, alors qu'un petit nombre de terme suffit lorsque les variations du signal sont "lentes". De la même façon qu'il est impossible de représenter la quantité réelle 1/3 par une suite finie de chiffre (0,33333333 n'est qu'une approximation grossière de 1/3 !), il est impossible de reconstruire un signal périodique possédant une transition instantanée (comme un carré) par une série finie de termes . Il en résulte une représentation erronée présentant un dépassement caractéristique au niveau de la discontinuité ("phénomène de Gibbs").

Mesurer ce dépassement, en %.

NB : **clic-gauche maintenu :** on peut effectuer une mesure sur le graphe en maintenant enfoncé le bouton gauche de la souris (les coordonnées du pointeur apparaissent en bas à gauche de la fenêtre).

3°) Influence du spectre de phase

a) Observer l'influence du spectre de phase sur l'allure d'un signal en synthétisant le signal suivant (l'imprimer) :

$v_1(t) = 0{,}5 + \sin(\omega t) + 0{,}8.\sin(2\omega t + \pi/4) + 0{,}4.\sin(3\omega t - 3\pi/2) + 0{,}2.\sin(4\omega t + \pi/2) + 0{,}1.\sin(5\omega t - \pi/3)$

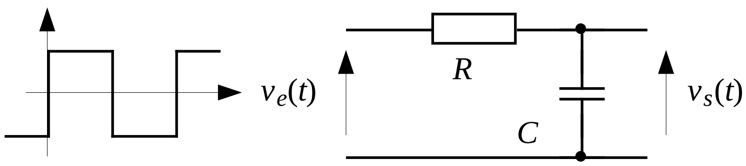
puis le signal suivant, où toutes les phases nulles :

$v_0(t) = 0{,}5 + \sin(\omega t) + 0{,}8.\sin(2\omega t) + 0{,}4.\sin(3\omega t) + 0{,}2.\sin(4\omega t) + 0{,}1.\sin(5\omega t)$

b) Calculer les valeurs efficaces de $v_1(t)$ et de $v_0(t)$. Conclusion.

4°) Etude de la réponse d'un système du 1er ordre par synthèse de Fourier

Un signal carré $v_e(t)$ de période T = 1s, d'amplitude comprise entre –1V et +1V, est appliqué à l'entrée d'un circuit RC de constante de temps τ = 0,2s :



a) Rappeler succinctement l'allure du signal de sortie $v_s(t)$ mesuré aux bornes du condensateur.

b) Rappeler l'expression littérale de la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ du circuit. En déduire les expressions de l'amplitude et et de la phase de la tension de sortie.

c) Connaissant la décomposition en série de Fourier du signal carré (cf 1°), calculer l'amplitude et la phase des 10 premiers harmoniques de la tension $v_s(t)$.

n	Ve	Arg(Ve)	H	Arg(H)	Vs	Arg(Vs)
1						
3						
5						
7						
9						

d) Synthétiser ce signal à l'aide du programme précédent. Imprimer.

ISBN 2-9520781-1-4

2- Analyse de fourier : calcul par Transformation de Fourier

Exécuter le programme *ejs_FourierAnalysis.jar*. Utilisation :

a) Saisir une formule dans la zone prévue à cet effet. Le signal est considéré par le programme comme étant nécessairement une fonction périodique du temps (t). Sa période est constante et arbitrairement égale à 2π (soit une fréquence $f \approx 0{,}16$ Hz). Le nombre d'échantillons est **N** (à l'ouverture du programme, **N** = 64).

Syntaxe usuelle : la multiplication s'écrit *****, la constante π s'écrit **pi**, la virgule décimale s'écrit par un point, etc.

b) Le signal apparaît dans la fenêtre supérieure (temps en abscisse), son spectre d'amplitude (= liste des amplitudes des harmoniques) dans la fenêtre inférieure (rang en abscisse). La raie de rang 0 est la composante continue du signal, la raie de rang 1 l'amplitude du fondamental.

Si l'on coche **Power Spectrum**, c'est le spectre de puissance qui est affiché (*rappel :* le spectre de puissance est la liste des carrés des amplitudes).

c) **Clic-gauche maintenu** sur le rectangle en haut d'une raie : la composante harmonique correspondante est affichée en rouge dans la fenêtre signal. En outre, les coordonnées du pointeur apparaissent en bas à gauche de la fenêtre.

d) Si l'on coche **Synthesize,** la synthèse des composantes sélectionnées est affichée en bleu dans la fenêtre signal. On peut alternativement sélectionner ou désélectionner chaque composante par un **clic-gauche** sur le rectangle en haut d'une raie.

1°) ***Observer le spectre*** de quelques signaux usuels qui peuvent être obtenus par exemple à l'aide des formules suivantes (tous ces signaux sont d'amplitude égale à 1). Justifier dans chaque cas l'allure du spectre obtenu.

- signal continu 1
- signal sinusoïdal .... sin(t), sin(2*t), sin(3*t), etc.
- signal triangle bipolaire *(amplitude 1)* .... 2*asin(sin(t))/pi
- signal carré bipolaire *(amplitude 1)* .... –sign(t–pi)
- signal AM (taux de modulation *a*, fréquence porteuse **F**) .... (1+**a***sin(t))*sin(**F***t)

(remplacer dans cette formule **a** *par un nombre compris entre 0 et 1)*
(remplacer dans cette formule **F** *par un nombre ≥ 2, par exemple* ***F*** *= 20)*

Rappel : sin(A).sin(B) = (1/2) [cos(A–B) – cos(A+B)]

Observer également, sans les justifier, les spectres suivant :

- signal rectangulaire *(amplitude 1, rapport cyclique α)* .... –sign(t-α*2*pi)

(remplacer dans cette formule α par un nombre compris entre 0 et 1)

- signal MLI (taux de modulation *a*, fréquence porteuse **F**) ...... sign(**a***sin(t)-asin(sin(**F***t)))

(remplacer dans cette formule **a** *par un nombre compris entre 0 et π/2)*
(remplacer dans cette formule **F** *par un nombre ≥ 2, par exemple* ***F*** *= 20)*

- signal FM (taux de modulation *a*, fréquence porteuse **F**) .... sin(**F***t+**a***sin(t))

(remplacer dans cette formule **a** *par un nombre ≥ 2, par exemple* ***a*** *= 10)*
(remplacer dans cette formule **F** *par un nombre ≥ 2, par exemple* ***F*** *= 20)*

2°) ***Phénomène de "repliement" du spectre (aliasing).***

Afficher un signal carré. Soit $N = 20$.

Mesurer les valeurs des amplitudes de ces dix premières harmoniques. Comparer ces valeurs à celles que fournissent les séries de Fourier (cf § 1-1) en calculant, pour chaque hamonique, l'erreur relative en % définie par : $\frac{\left|\text{amplitude théorique (série de Fourier) - amplitude calculée (Analyse de Fourier)}\right|}{\text{amplitude théorique}}$.

ISBN 2-9520781-1-4

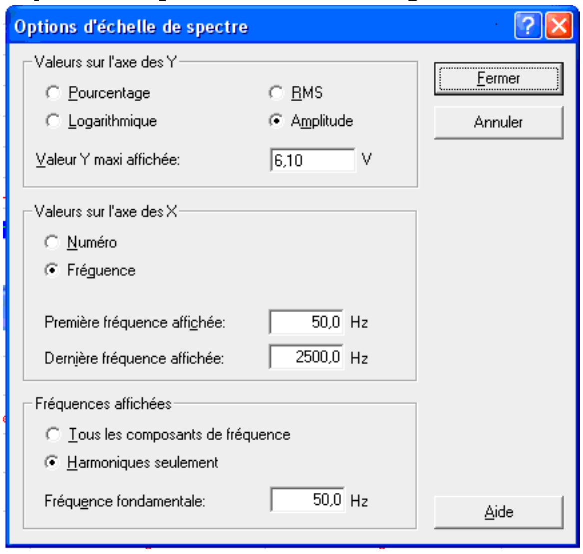
Conclusion.

n	carré (Math)	carré (Analyse)	erreur %
1			
3			
5			
7			
9			

3°) *Utilisation d'un logiciel d'analyse de spectre*

Générer un signal carré TTL 50 Hz. Analyser son spectre à l'aide du logiciel *Flukeview®*.

menu **Outils → Spectre**
menu **Options → Echelle**

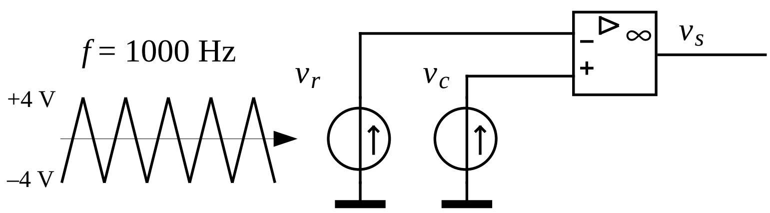


Remplir le tableau suivant :

Base de temps	Fréquence du fondamental	Fenêtre d'observation	Fréquence maxi	Fréquence d'échantillonnage	Période d'échantillonnage	Nombre d'échantillons	Nombre de raies
BT (ms)	F1 (Hz)	T1 = 1/F1	Fmax	Fe = 2Fmax	Te = 1/Fe	N = T1/Te	
5	50						
10	50						
20	50						
50	50						
100	50						
> 100	50						

3- Analyse du spectre d'un signal Modulé en Largeur d'Impulsion (MLI)

1°) *Etude d'une commande "palier et rampe"*

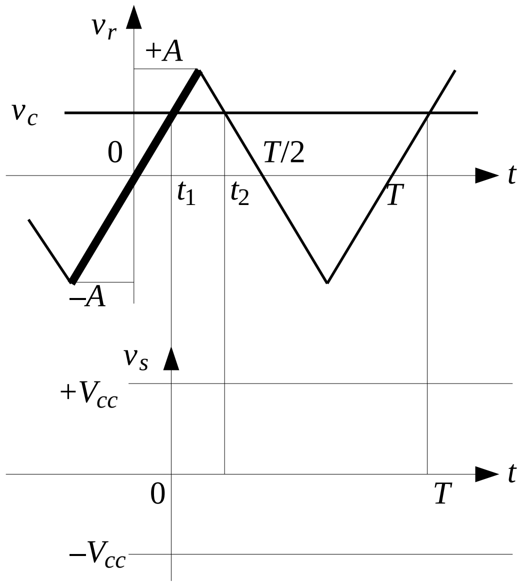


On note A l'amplitude du signal triangulaire. Soit A = 4 V. La tension v_c est une tension continue réglable comprise entre $+A$ et $-A$. On note α le rapport cyclique défini comme suit :

$\alpha = \dfrac{\text{durée de l'état haut, où } V_s = +V_{cc}}{T}$. Tracer la courbe $\alpha_{\%}(v_c)$.

ISBN 2-9520781-1-4

Conclusion : quel est la fonction réalisée par une commande "palier et rampe" ?



2°) *Etude théorique :*

a) Tracer le graphe de la tension $v_s(t)$

b) Exprimer la relation $v_r(t)$ pour le segment de droite dessiné **en gras.**

c) En déduire l'expression de l'instant t_1 où $v_r(t_1) = v_c$.

d) Par symétrie, en déduire la durée $t_2 - t_1$.

e) En déduire l'expression du rapport cyclique α.

f) Etablir l'expression de la valeur moyenne $\overline{V_s}$ en fonction de V_{cc} et α.

g) Des questions *e)* et *f)* déduire l'expression de la relation $\overline{V_s}(V_c)$. Conclusion.

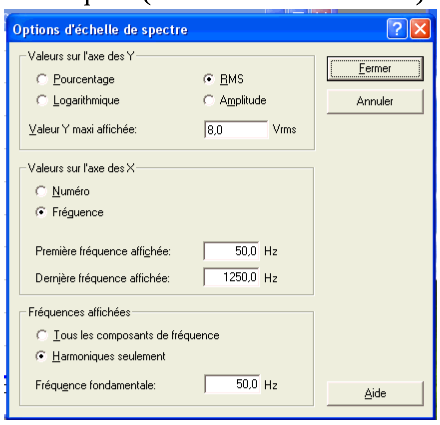
3°) *Analyse du spectre du signal MLI*

Le signal v_c est maintenant un signal sinusoïdal alternatif d'amplitude V_c. Le signal triangulaire v_r ***("porteuse")*** est ***modulé*** par le signal v_c ***("signal modulant")***. Soit $M = V_c/A$ le ***coefficient de modulation*** du signal triangulaire par le signal sinusoïdal.

Triangle : $f = 1000$ Hz, $V_r = \pm 4$ V ; Sinus : $f = 50$ Hz, V_c variable.

Pour M variant de 0,5 à 1,5 par pas de 0,25 mesurer le spectre du signal MLI à l'aide du logiciel *Flukeview®*.

Relever les valeurs des amplitudes des différents harmoniques (cf tableau ci-dessous).



base de temps : 2ms/div
entrée A : signal sinusoïdal
entrée B : signal MLI, 5 V/div

Remplir le tableau des amplitudes des harmoniques de la tension $v_s(t)$.

Tracer la courbe THD = f(M). Conclusion.

n \ M	0,5	0,75	1	1,25	1,5
1					
2					
3					
4					
5					
THD					

ISBN 2-9520781-1-4