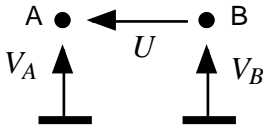
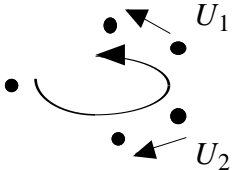
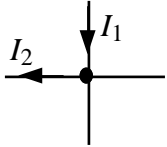


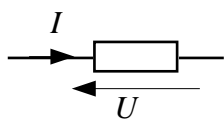
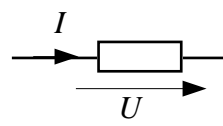
A12. Théorèmes généraux sur les circuits

Courant Continu – CC (*Direct Current – DC*)

- **Différence de potentiel (ddp)** $U = V_A - V_B$ 

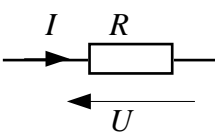
- Loi des mailles $\sum U = 0 \Leftrightarrow + U_1 - U_2 \dots = 0$ 


- Loi des nœuds $\sum I = 0 \Leftrightarrow + I_1 - I_2 \dots = 0$ 

- **Dipôle récepteur :**  **dipôle générateur :** 

- Dipôle ou source réversible (en convention récepteur)

générateur $P = UI < 0$	récepteur $P = UI > 0$
$P = UI > 0$ récepteur	$P = UI < 0$ générateur

- **Loi d'Ohm** (en convention récepteur) $U = R.I$ 

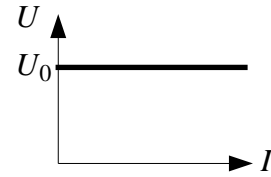
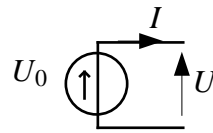
 : en convention générateur (U et I de même sens), la loi devient : $U = - R I$

Résistances en série $R = R_1 + R_2$
 $R = \sum R_i$

Résistances en parallèle $G = G_1 + G_2 \Leftrightarrow R = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2}$ (avec $G = 1/R$)
 $G = \sum G_i$ ou $\frac{1}{R} = \sum \frac{1}{R_i}$

• Sources de tension

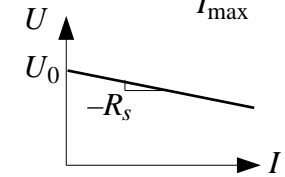
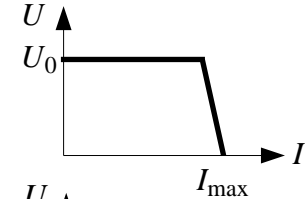
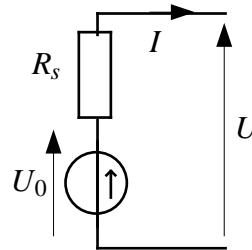
Source idéale : $\forall I : U = U_0$



⚠ Source de tension avec limitation de courant :

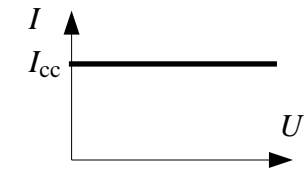
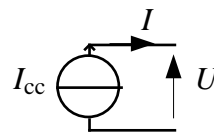
Source réelle (modèle de Thévenin) :

$$U = -R_s \cdot I + U_0$$



• Sources de courant

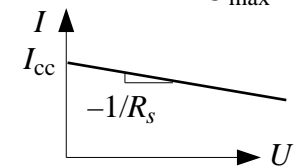
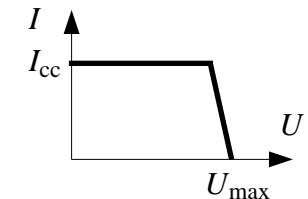
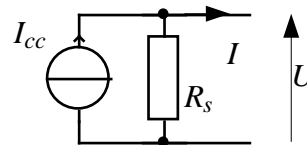
Source idéale : $\forall U : I = I_{cc}$



⚠ Sources de courant avec limitation de tension

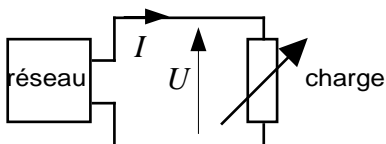
Source réelle (modèle de Norton) :

$$I = -\frac{U}{R_s} + I_{cc}$$

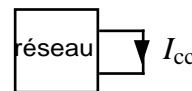


• Équivalence Thévenin / Norton : $U_0 = R_s \cdot I_{cc}$

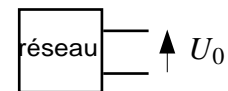
réseau en fonctionnement normal :



sortie en court-circuit :



sortie à vide :



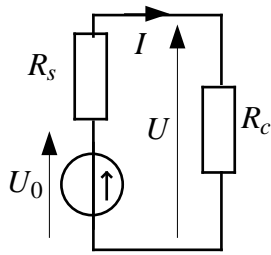
Calcul de R_s : c'est la résistance équivalente au réseau vu entre ses points de sorties lorsque ses sources autonomes de tension et de courant sont passivées.

Sources passivées : une source de tension est remplacée par un court-circuit ; une source de courant est remplacée par un circuit ouvert.

Source autonome : source non commandée.

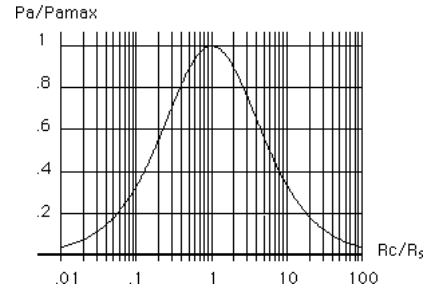
• **Adaptation d'impédance**

Quand la puissance délivrée par le générateur de Thévenin à sa charge est maximale, on dit que cette charge est "adaptée" au générateur . Soit P_a cette puissance :



charge quelconque : $P_a = U_0^2 \frac{R_c}{(R_s + R_c)^2}$

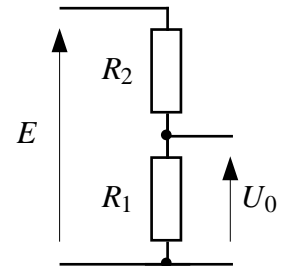
charge adaptée : $\begin{cases} R_c = R_s \\ P_{a \max} = \frac{U_0^2}{4R_s} \end{cases}$



• **Diviseur de tension** (et son modèle équivalent de Thévenin) :

à vide :

$$U_0 = k.E \text{ avec } k = \frac{R_1}{R_1 + R_2}$$

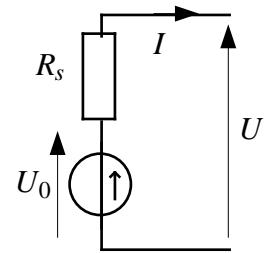


en charge (modèle de Thévenin) :

$$U_0 = kE$$

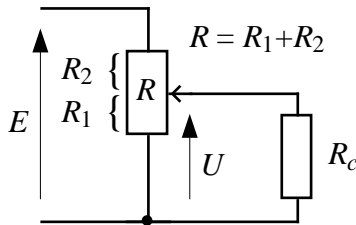
$$R_s = \frac{R_1.R_2}{R_1 + R_2} = k(1 - k)R$$

(avec $R = R_1 + R_2$)

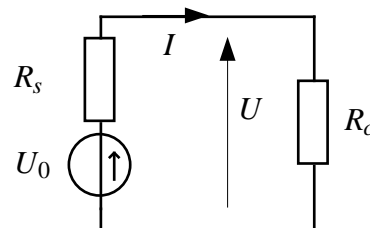


Application : étude d'un potentiomètre R (ou d'un capteur résistif) chargé par une résistance R_c

Lorsque le potentiomètre n'est pas chargé ($R_c \infty$), celui-ci délivre une tension $U_0 = kE$ proportionnelle à la position de son curseur. Problème : quelle erreur commet-on en mesurant la tension de sortie U du potentiomètre lorsque celui-ci est en charge au lieu d'être à vide ? Pour répondre à cette question, on remplace le potentiomètre par son modèle équivalent de Thévenin :



⇔ modèle de Thévenin :

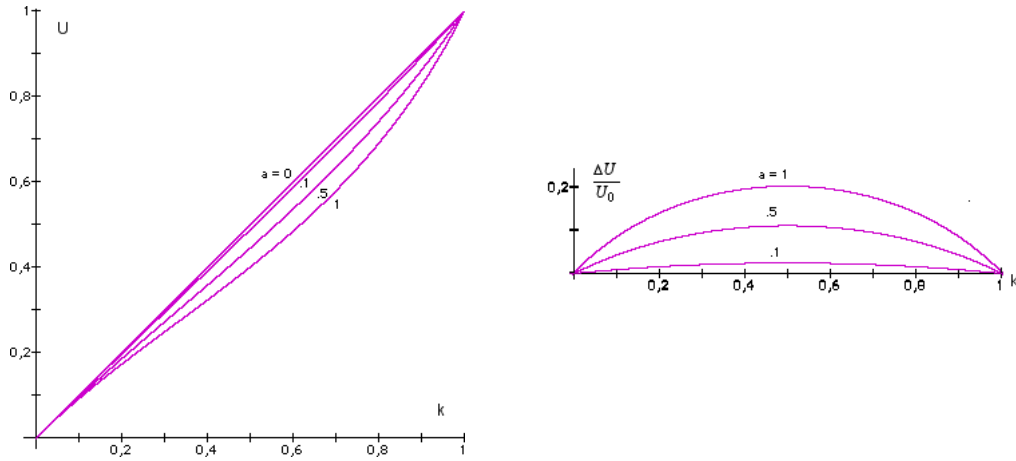


On calcule : $U = U_0 - R_s I = U_0 - R_s \frac{U_0}{R_s + R_c}$. D'où l'on tire l'erreur absolue $\Delta U = U_0 - U$ et

l'erreur relative $\Delta U/U_0$.

Pour cela, on pose : $a = \frac{R}{R_c}$ rapport entre la résistance totale du potentiomètre et sa charge.

On trouve : $U = \frac{kE}{1 + k(1 - k)a}$ et $\frac{\Delta U}{U_0} = 1 - \frac{1}{1 + k(1 - k)a}$:



Évolution de U et de $\frac{\Delta U}{U_0}$ en fonction de la position du curseur, donc de k , pour différentes valeurs de a (avec $E = 1 \text{ V}$)

En calculant la dérivée de l'erreur par rapport à k , on trouve que $\frac{d\left(\frac{\Delta U}{U_0}\right)}{dk}$ est nulle pour $k = 1/2$.

L'erreur relative est donc maximale lorsque le curseur est en milieu de course ($k = 0,5$). En ce point, elle vaut : $\left(\frac{\Delta U}{U_0}\right)_{\max} = \frac{0,25 a}{1 + 0,25 a}$.

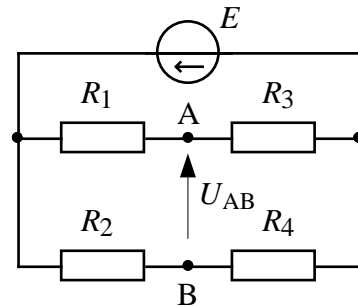
Par exemple, si la charge du potentiomètre vaut dix fois sa valeur, soit $R_c = 10 R$, donc $a = 0,1$, on commet une erreur relative maximale $\approx 2,5 \%$. Inversement, si l'on veut que l'erreur ne dépasse pas 1% quelle que soit la position du curseur, il ne faut pas que l'impédance de charge R_c soit inférieure à une valeur minimale de l'ordre de 25 fois R : $\Delta U/U_0 < 1\% \Leftrightarrow R_c > 25 R$.

• **Pont de Wheatstone** (et son modèle équivalent de Thévenin) :

$$U_0 = (U_{AB})_{\text{à vide}} = E \frac{R_2 R_3 - R_1 R_4}{(R_1 + R_3)(R_2 + R_4)}$$

$$R_s = R_{AB} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} + \frac{R_2 R_4}{R_2 + R_4}$$

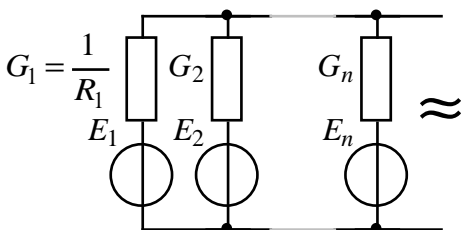
$$U_0 = 0 \text{ (pont équilibré) pour } R_2 R_3 = R_1 R_4$$



• **Théorème de superposition**

L'intensité du courant dans une branche appartenant à un circuit maillé est égale à la somme algébrique des intensités que ferait passer séparément chaque source autonome seule en circuit, les autres sources autonomes étant passivées.

• **Théorème de Millman** (générateurs en //)



$$G = \sum_{i=1}^n G_i$$

$$U_0 = \frac{\sum_{i=1}^n G_i E_i}{G}$$

Cas particulier important : $n = 2$:

$$R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

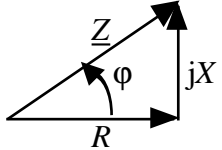
$$U_0 = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 + R_2}$$

Courant Alternatif – CA (Alternative Current – AC)

• **Loi d'Ohm en alternatif** ◻

$$\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \Leftrightarrow \begin{cases} U = |\underline{Z}| I \\ \text{Arg}(\underline{U}) = \text{Arg}(\underline{Z}) + \text{Arg}(\underline{I}) \end{cases}$$

Impédance (soit $\varphi = \text{Arg}(\underline{Z})$) $\underline{Z} = R + jX$

$$\begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + X^2} \\ \tan \varphi = \frac{X}{R} \\ R = |\underline{Z}| \cos \varphi \\ X = |\underline{Z}| \sin \varphi \end{cases}$$


$\varphi > 0$: dipôle inductif
 $\varphi < 0$: dipôle capacitif

R : résistance ; X : réactance

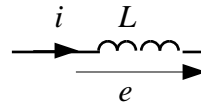
Admittance $\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = G + jS$

G : conductance ; S : susceptance

• **Inductance**

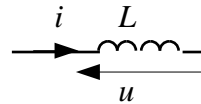
convention générateur
(avec circuit magnétique non saturé)

$$e = -\frac{d\Phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$



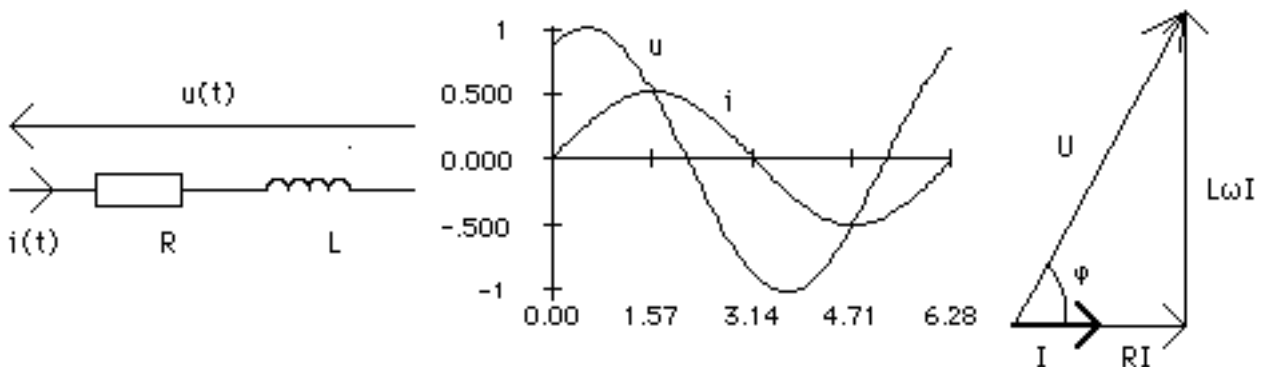
convention récepteur

$$u = L \frac{di}{dt} \Rightarrow \underline{Z} = jL\omega$$



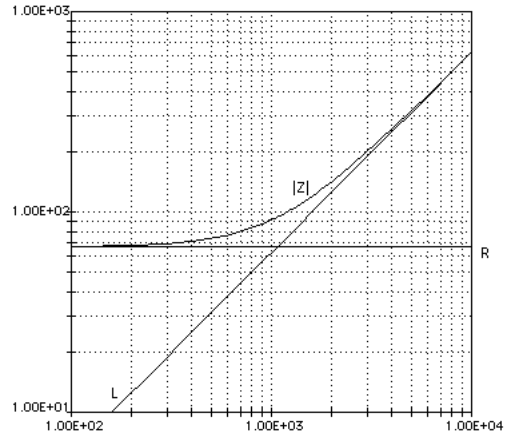
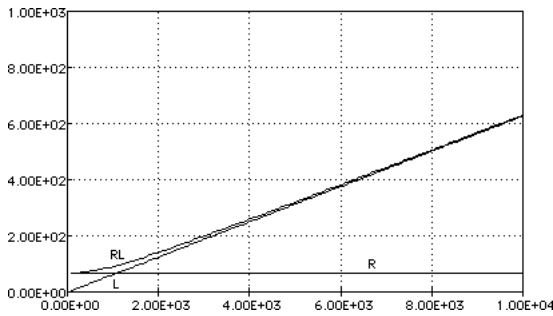
Dipôle inductif série

$$\underline{Z} = R + jL\omega \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} \\ \text{Arg}(\underline{Z}) = \arctan \frac{L\omega}{R} \quad (\Leftrightarrow \varphi > 0) \end{cases}$$



⚠ Les paramètres apparents R et L d'une bobine réelle ne sont pas constants et dépendent de la fréquence et de la tension d'alimentation. Dans le cas d'une bobine à noyau, la résistance apparente tient compte non seulement de la résistance du fil mais aussi des pertes Joule (pertes par hystérésis et par courants de Foucault).

exemple : $R = 68 \Omega$; $L = 10 \text{ mH}$



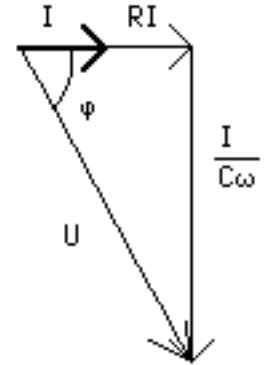
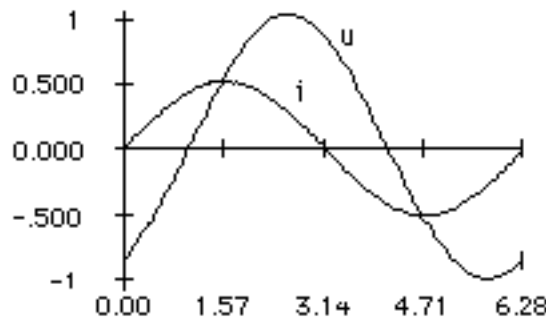
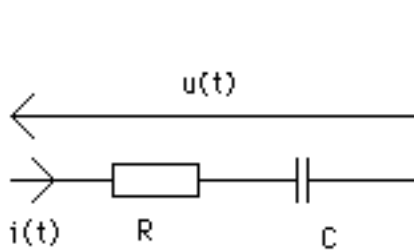
• Condensateur

convention récepteur

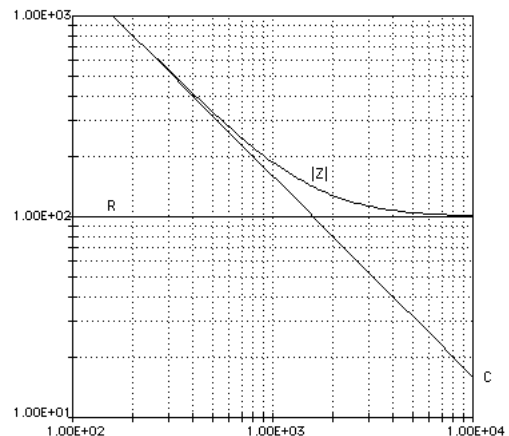
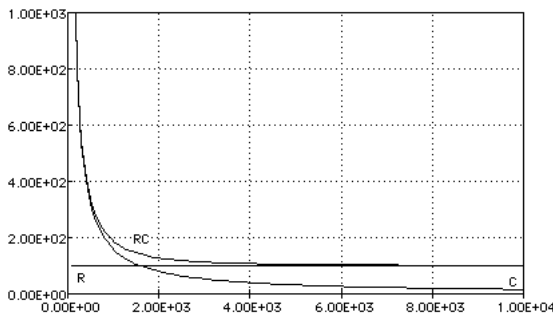
$$i = C \frac{du}{dt} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{1}{jC\omega} = \frac{-j}{C\omega}$$

Dipôle capacitif série

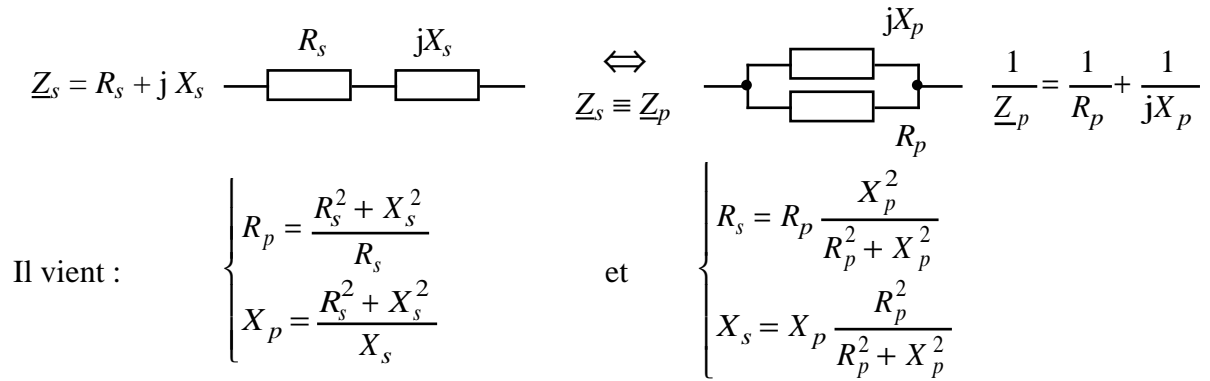
$$\underline{Z} = R + \frac{1}{jC\omega} \Rightarrow \begin{cases} |\underline{Z}| = \sqrt{R^2 + \frac{1}{C^2\omega^2}} \\ \text{Arg}(\underline{Z}) = -\arctan \frac{1}{RC\omega} \quad (\Leftrightarrow \varphi < 0) \end{cases}$$



exemple : $R = 100 \Omega$; $C = 1 \mu\text{F}$



• **Équivalence des représentations série et parallèle des dipôles réactifs**



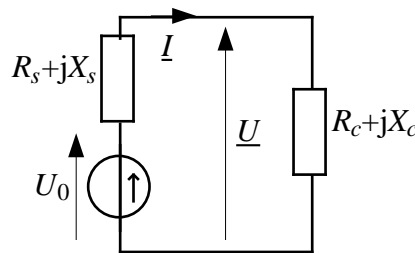
• **Adaptation d'impédance, cas d'une charge complexe :**

P_a : puissance active absorbée par la charge :

$$R_c = R_s$$

$$X_c = -X_s$$

$$P_{a\max} = \frac{U_0^2}{4R_s}$$



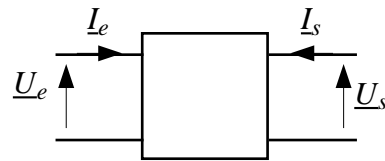
• **Quadripôles réactifs**

impédance d'entrée

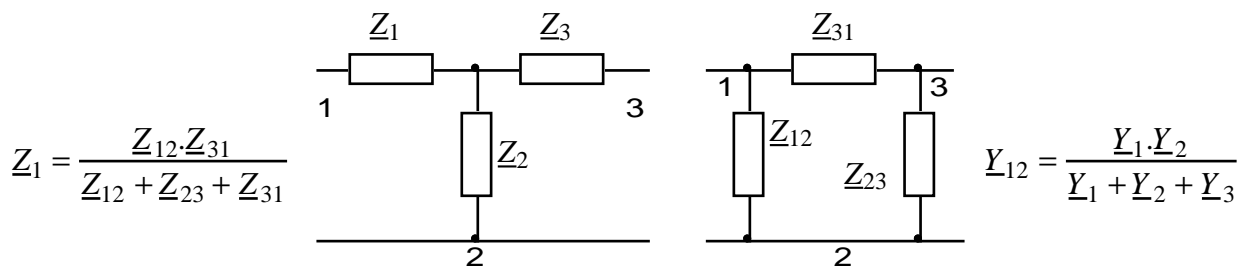
$$\underline{Z}_e = \frac{\underline{U}_e}{\underline{I}_e}$$

impédance de sortie

$$\underline{Z}_s = \frac{\underline{U}_s}{\underline{I}_s}$$



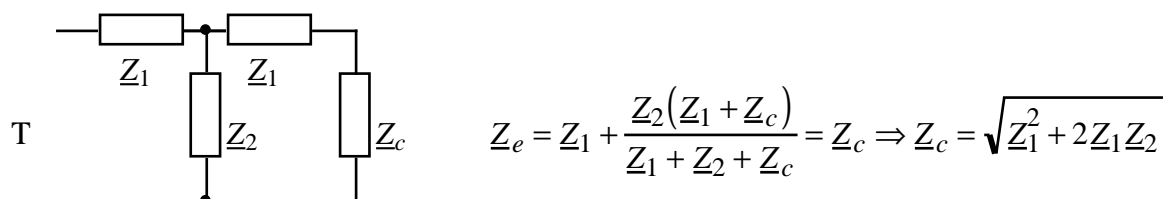
Théorème de Kennelly : quadripôle en T ↔ quadripôle en Π

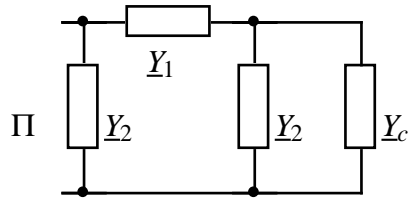


(permuter les indices pour les autres impédances)

Impédance caractéristique : c'est l'impédance \underline{Z}_c telle que, si l'on connecte une charge égale à \underline{Z}_c à la sortie du quadripôle, son impédance d'entrée est encore égale à \underline{Z}_c .

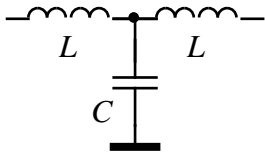
Exemples : cas de quadripôles symétriques :



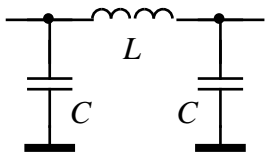


$$\underline{Y}_e = \underline{Y}_2 + \frac{\underline{Y}_1(\underline{Y}_2 + \underline{Y}_c)}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 + \underline{Y}_c} = \underline{Y}_c \Rightarrow \underline{Y}_c = \sqrt{\underline{Y}_2^2 + 2\underline{Y}_1\underline{Y}_2}$$

Réalisations :



$$\left. \begin{array}{l} \underline{Z}_1 = jL\omega \\ \underline{Z}_2 = \frac{1}{jC\omega} \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Z}_c = \sqrt{\frac{2L}{C}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}LC\omega^2}$$



$$\left. \begin{array}{l} \underline{Y}_1 = \frac{1}{jL\omega} \\ \underline{Y}_2 = jC\omega \end{array} \right\} \Rightarrow \underline{Y}_c = \sqrt{\frac{2C}{L}} \sqrt{1 - \frac{1}{2}LC\omega^2}$$

NB : dans le cas de quadripôles symétriques, on montre que : $\underline{Z}_c = \sqrt{\underline{Z}_{e_0} \cdot \underline{Z}_{e_{cc}}} = \frac{1}{\sqrt{\underline{Y}_{e_0} \cdot \underline{Y}_{e_{cc}}}}$

où \underline{Z}_{e_0} (resp \underline{Y}_{e_0}) et $\underline{Z}_{e_{cc}}$ (resp $\underline{Y}_{e_{cc}}$) sont les impédances (resp. admittances) d'entrée lorsque la sortie du quadripôle est en circuit ouvert (*indice "0"*) ou en court-circuit (*indice "cc"*).