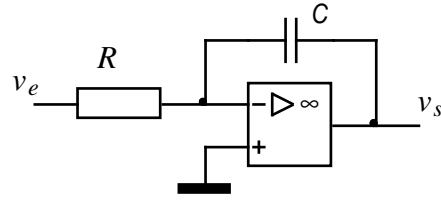


A22 - Fonctions intégration et dérivation

Intégrateur

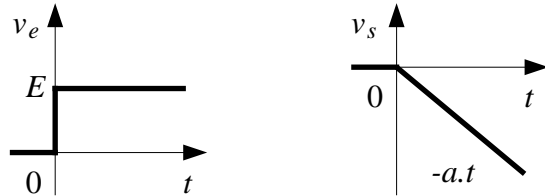
$$\tau_i = RC$$

$$v_s = -\frac{1}{\tau_i} \int_0^t v_e(t) dt$$



Réponse à un échelon (réponse indicielle)

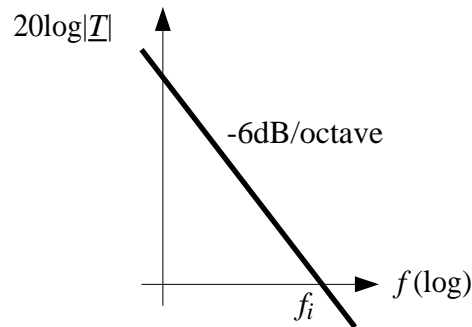
$$\left. \begin{array}{l} t \geq 0 : v_e = E \\ t < 0 : v_s = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow v_s = -\frac{E}{\tau_i} t$$



Réponse en fréquence

$$f_i = \frac{1}{2\pi\tau_i}$$

$$\underline{T} = \frac{v_s}{v_e} = -\frac{1}{jRC\omega} = -\frac{1}{j\frac{f}{f_i}} = -\frac{1}{\tau_i p}$$



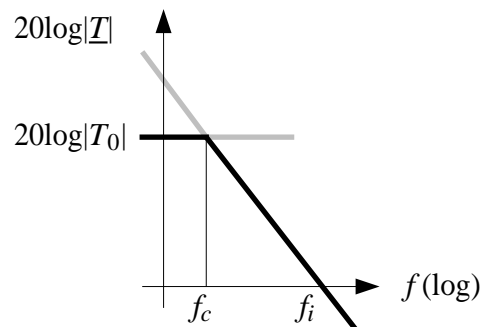
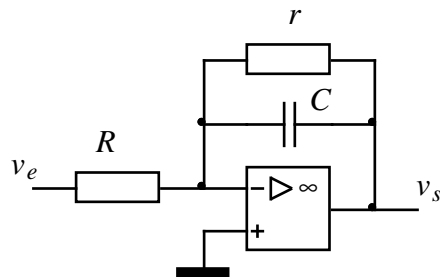
Limitation du gain en BF

Le principal défaut du montage précédent est qu'il ne fonctionne pas... En effet, le gain de cet amplificateur tend vers l'infini vers les basses fréquences. Même si on prend en compte le fait que le gain de l'AOP réel n'est pas infini, mais seulement très grand, celui-ci fonctionne en boucle ouverte pour les signaux continus à cause du condensateur. Il amplifie donc la tension de décalage (tension résiduelle V_{off} existant entre les deux entrées de l'AOP réel, cf § A21) qui, même très faible, entraîne la saturation de l'amplificateur vers $\pm V_{cc}$. Il faut donc limiter le gain du montage en BF :

$$r \gg R$$

$$T_0 = -\frac{r}{R}$$

$$f_c = \frac{f_i}{|T_0|}$$

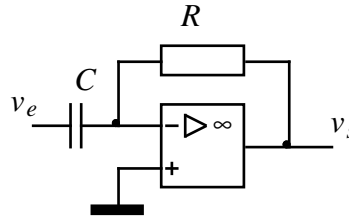


où T_0 est le gain du montage en courant continu. Le montage est intégrateur pour $f > f_c$.

Dérivateur

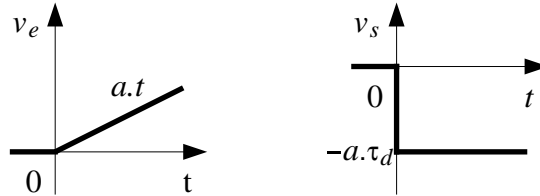
$$\tau_d = RC$$

$$v_s = -\tau_d \frac{dv_e(t)}{dt}$$



Réponse à une rampe

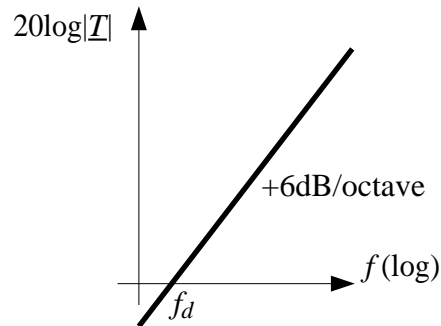
$$t > 0 : v_e = at \Rightarrow v_s = -a\tau_d$$



Réponse en fréquence

$$f_d = \frac{1}{2\pi\tau_d}$$

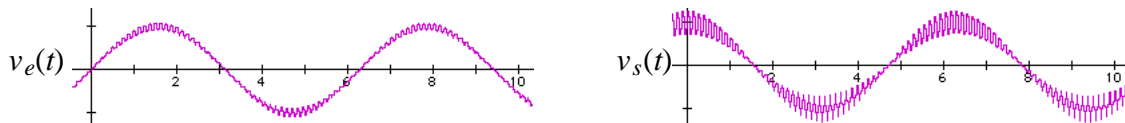
$$\underline{T} = \frac{v_s}{v_e} = -jRC\omega = -j\frac{f}{f_d} = -\tau_d P$$



Limitation du gain en HF

Le gain de cet amplificateur (idéal) tend vers l'infini vers les hautes fréquences. Mais dans la pratique il est limité par la bande passante de l'AOP réel, qui est par nature un filtre passe-bas (cf § A21). Contrairement à l'intégrateur, le montage précédent peut donc fonctionner sans modification.

Toutefois, au signal $v_e(t)$ se superpose en général un bruit parasite HF d'amplitude faible mais aux variations très rapides, que le dérivateur amplifie considérablement. Il en résulte que le bruit superposé au signal de sortie peut être important, nettement supérieur au bruit entrant :

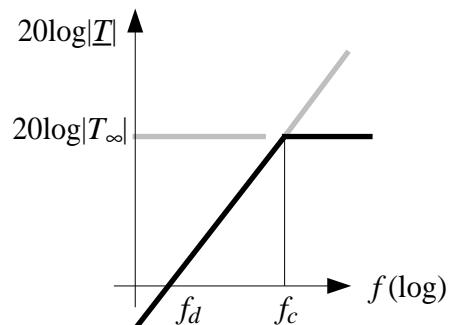
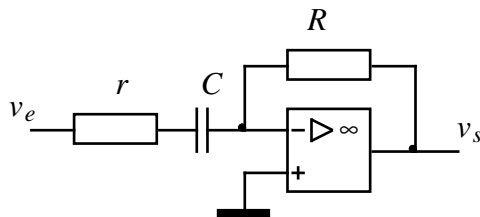


Pour limiter ce phénomène, on peut donc procéder comme dans le cas de l'intégrateur en limitant le gain en HF de façon précise par une résistance additionnelle :

$$r \ll R$$

$$T_\infty = -\frac{R}{r}$$

$$f_c = f_d \cdot |T_\infty|$$



où T_∞ est le gain du montage en HF. Le montage est dérivateur pour $f < f_c$.

Correcteur PI

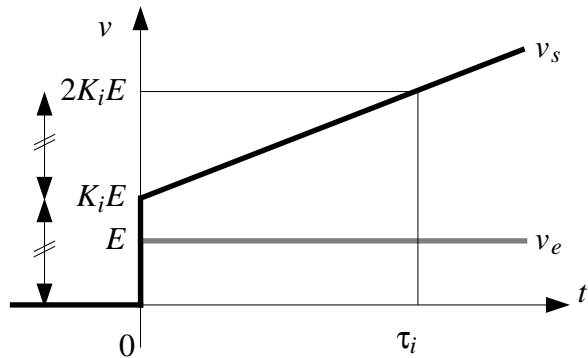
Action Proportionnelle et Intégrale

$$C(p) = \frac{V_s}{V_e} = K_i \left(1 + \frac{1}{\tau_i p} \right) \Leftrightarrow \begin{cases} v_s = K_i v_e + \frac{K_i}{\tau_i} \int_0^t v_e dt \\ \underline{C}(j\omega) = K_i \frac{1 + j\tau_i \omega}{j\tau_i \omega} \end{cases}$$

Réponse à un échelon $u(t)$

Soit : $v_e = u(t) \Rightarrow v_s(t) = K_i \left(E + \frac{E}{\tau_i} t \right)$

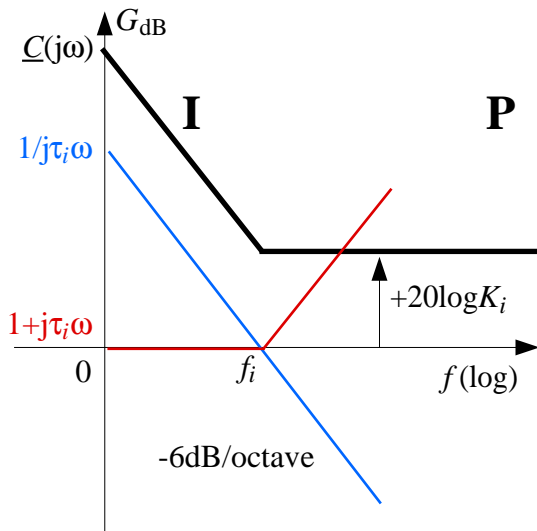
avec : $\begin{cases} t < 0 \Leftrightarrow u(t) = 0 \\ t \geq 0 \Leftrightarrow u(t) = E \end{cases}$



Détermination graphique de K_i et de τ_i connaissant la valeur de l'échelon E :

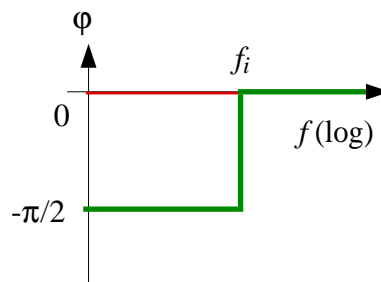
- 1) on détermine K_i en $t = 0$ au point d'ordonnée $K_i E$;
- 2) on cherche le point d'ordonnée $2K_i E$, dont l'abscisse fournit immédiatement la valeur de τ_i .

Réponse en fréquence



$$f_i = \frac{1}{2\pi\tau_i}$$

$$\underline{C}(j\omega) = K_i \frac{1}{j\tau_i \omega} (1 + j\tau_i \omega)$$

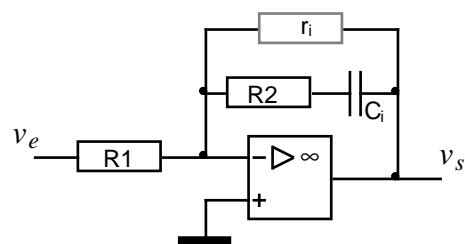
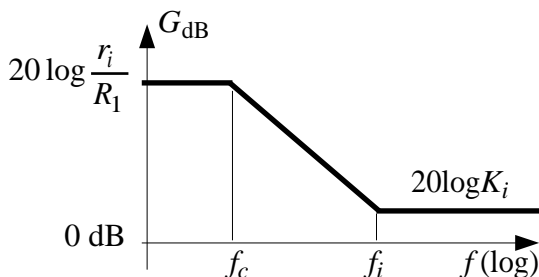


Réalisation à l'aide d'un AOP

$$K_i = -\frac{R_2}{R_1}$$

$$f_i = \frac{1}{2\pi R_2 C_i}$$

$$f_c = \frac{R_2}{r_i} f_i$$



⚠ Le montage type "amplificateur inverseur" introduit un signe – dans la fonction de transfert.

⚠ Comme précédemment (I pur), une résistance r_i de forte valeur ($\gg R_1$ et R_2) limite le gain en BF.

⚠ A cause des défauts de l'AOP réel, ce montage nécessite d'être réglé soigneusement (notamment réglage du zéro pour compensation des décalages). En outre, ces décalages variant au cours du temps (dérive en température...), ces réglages doivent être répétés régulièrement.

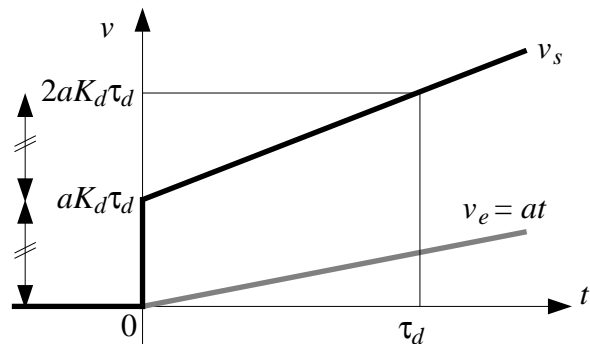
Correcteur PD

Action Proportionnelle et Dérivée

$$C(p) = \frac{V_s}{V_e} = K_d(1 + \tau_d p) \Leftrightarrow \begin{cases} v_s = K_d v_e + K_d \tau_d \frac{dv_e}{dt} \\ \underline{C}(j\omega) = K_d(1 + j\tau_d \omega) \end{cases}$$

Réponse à une rampe

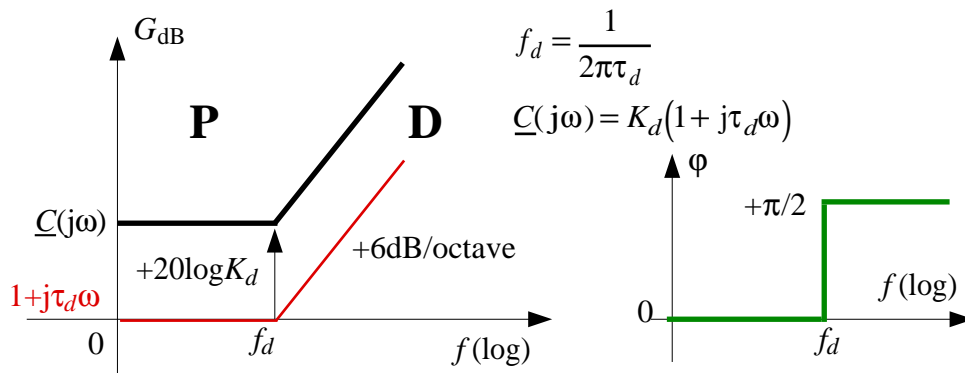
Soit : $v_e = at \Rightarrow v_s(t) = aK_d t + aK_d \tau_d$



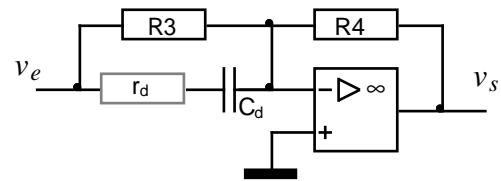
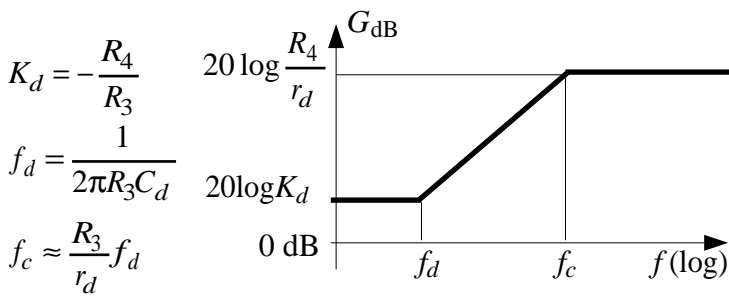
Détermination graphique de K_d et de τ_d connaissant la valeur de la pente a :

1) On note l'ordonnée à l'origine $aK_d \tau_d$ du point d'abscisse $t = 0$. Au double de cette valeur on trouve le point d'abscisse $t = \tau_d$. 2) On en déduit la valeur de K_d en $t = 0$.

Réponse en fréquence



Réalisation à l'aide d'un AOP



⚠ Le montage type "amplificateur inverseur" introduit un signe - dans la fonction de transfert.

⚠ Comme précédemment (D pur), une résistance r de faible valeur (<< à R3 et R4) limite le gain en HF.

⚠ A cause des défauts de l'AOP réel, ce montage nécessite d'être réglé soigneusement (notamment réglage du zéro pour compensation des décalages). En outre, ces décalages variant au cours du temps (dérive en température...), ces réglages doivent être répétés régulièrement.

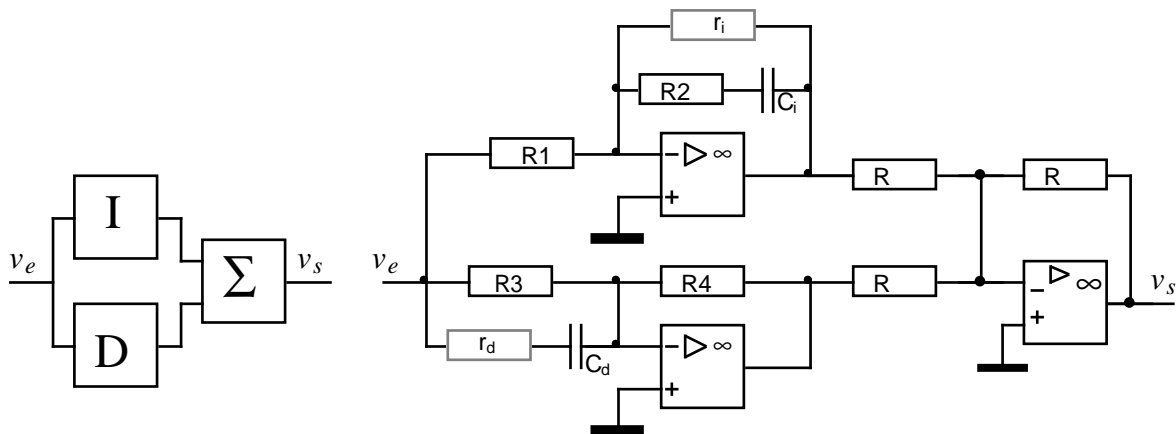
Correcteur PID

Exemple : PID mixte à structure parallèle

Action Proportionnelle, Intégrale et Dérivée

$$C(p) = \frac{V_s}{V_e} = K \left(1 + \frac{1}{T_i p} + T_d p \right) \Leftrightarrow \begin{cases} v_s = K v_e + \frac{K}{T_i} \int_0^t v_e dt + K T_d \frac{d v_e}{dt} \\ \underline{C}(j\omega) = K \frac{1 + j T_i \omega + T_i T_d (j\omega)^2}{j T_i \omega} \end{cases}$$

Réalisation à l'aide d'AOP



⚠ Le sommateur inverseur élimine les signes - introduits par les étages I et D.

⚠ Cette structure a pour inconvénient que les réglages des constantes K, Ti et Td ne sont pas indépendants. Par identification, on trouve, en fonction de Ki, Kd, τi et τd :

$$K = K_i + K_d \quad ; \quad T_i = \frac{K_i + K_d}{K_i} \tau_i \quad ; \quad T_d = \frac{K_d}{K_i + K_d} \tau_d$$