

## B15. Théorème de Shannon

### • Théorème de Shannon

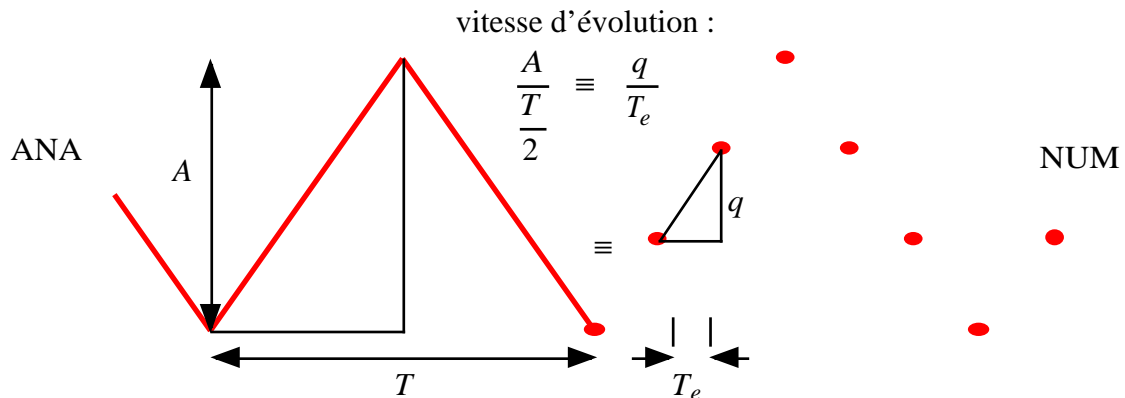
Un système de TNS fait subir au signal analogique deux opérations :

- un échantillonnage (accompagné éventuellement d'un blocage) de fréquence  $F_e$  et de période  $T_e = 1/F_e$

- une quantification sur  $n$  bits avec une précision  $p = \frac{1}{2^n - 1}$  (avec  $n$  bits on dispose de  $2^n$

valeurs, soit  $2^n - 1$  intervalles de tension distincts).

Ces deux opérations doivent être cohérentes entre elles : intuitivement, on comprend qu'il est inutile de suréchantillonner un signal quantifié de façon approximative, ou inversement. Considérons un signal triangulaire analogique de période  $T$  et d'amplitude  $A$ , échantillonné à la fréquence  $F_e$  et quantifié sur  $n$  bits.



Le signal analogique varie à raison de  $A$  volts par demi-période, soit une pente ou vitesse d'évolution égale à  $\frac{A}{T/2}$  V.s<sup>-1</sup>. Il est numérisé avec une précision  $p$ , soit une résolution  $q = p.A$ . La vitesse d'évolution du signal numérique est donc  $\frac{q}{T_e}$  V.s<sup>-1</sup>.

Le signal numérique "suivra" les évolutions du signal analogique si ces deux vitesses sont égales. Il faut donc que :

$$\frac{A}{T/2} = \frac{q}{T_e} \Rightarrow p = \frac{q}{A} = \frac{2T_e}{T}$$

Le nombre minimum de bits est évidemment  $n = 1$ , ce qui correspond à une quantification "tout ou rien" où  $q = A$  (sur la figure, seuls subsisteraient les deux points situés en haut et en bas du signal). Alors :

$$n \geq 1 \Rightarrow p \leq 1 \Rightarrow T \geq 2 T_e \text{ ou encore : } F \leq \frac{F_e}{2}$$

**Théorème de Shannon** : la fréquence d'échantillonnage doit être au moins égale au double de la fréquence du signal analogique.

En deçà de cette limite *théorique*, il n'est pas possible de reconstituer un signal à partir de ses échantillons. Dans la pratique, on choisit :

- en instrumentation :  $n \geq 4$ , soit  $p \leq 1/15$ , donc  $F \leq F_e / 30$ .
- en audio : pour  $F \leq 20$  kHz (son Hi-Fi),  $F_e = 44,1$  kHz
- en téléphonie : pour  $F \leq 3400$  Hz (voix humaine),  $F_e = 8$  kHz.

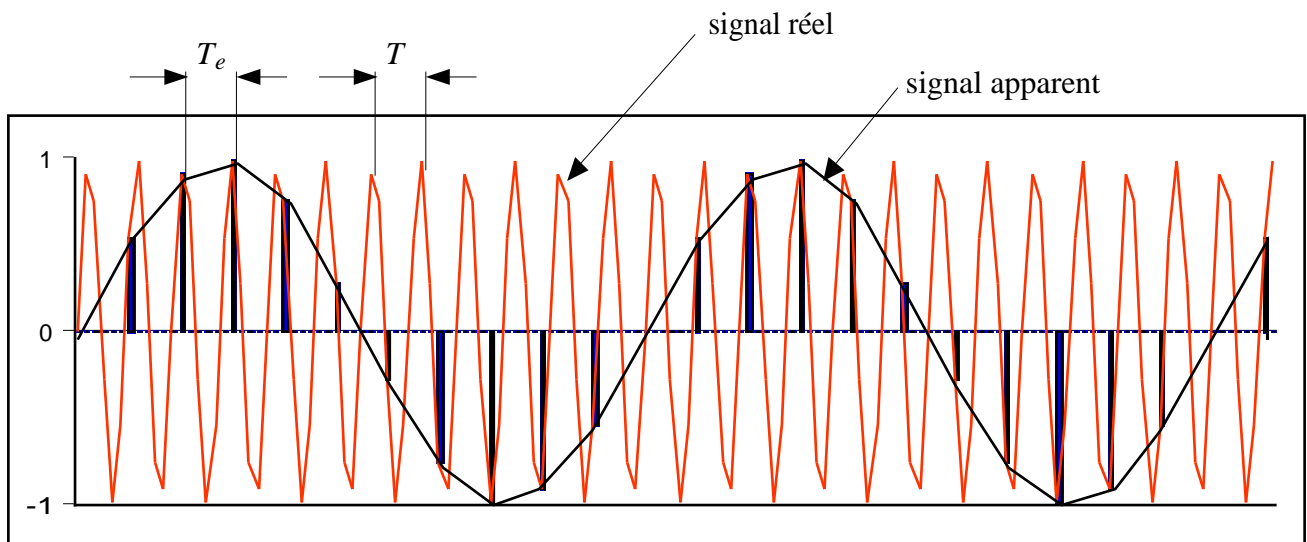
### • *Filtre anti-repliement (anti-aliasing)*

Il est inutile et même nuisible d'imposer à un système de TNS des signaux dont les variations seraient plus rapides que ce qu'il est capable de traiter à la fréquence  $F_e$ .

Dans le cas contraire, on constate expérimentalement la présence d'un effet "stroboscopique" : au signal de fréquence trop élevée se substitue un signal de fréquence *apparente* plus basse. Tout se passe comme si les fréquences hautes étaient "repliées" dans la partie du spectre inférieure à  $F_e / 2$  (voir chap B34).

On fait donc précéder le système d'un filtre passe-bas "anti-repliement" éliminant les signaux de fréquence supérieure à  $F_e / 2$ .

*Exemple* : on choisit ici  $T_e = 1,1 T$  :



### • *Filtre de lissage*

Pour reconstruire le signal analogique d'origine à partir du signal échantillonné, un filtre passe-bas est nécessaire. Sa fréquence de coupure est choisie égale ou inférieure à  $F_e / 2$ .

