B21 - Discrétisation

• *Calcul approché d'une dérivée*

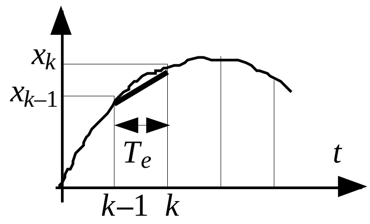
On considère les suites d'échantillons ... x_{k-2}, x_{k-1}, x_k ... et ... y_{k-2}, y_{k-1}, y_k ... d'entrée et de sortie d'un système numérique (cf § B17), qui représentent respectivement les signaux $x(t)$ et $y(t)$.

- *Dérivée première*

La définition mathématique de la dérivée est : $x' = \dfrac{dx}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{T_e \to 0} \dfrac{x_k - x_{k-1}}{T_e}$

En notant x'_k la dérivée approchée de x à l'instant kT_e, on aboutit à deux définitions possibles selon que l'on rapporte le résultat y_k à l'instant k ou à l'instant $k-1$:

$$\begin{cases} y_k = x'_k = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{T_e} \; (\textit{dérivée arrière}) \\ y_{k-1} = x'_{k-1} = \dfrac{x_k - x_{k-1}}{T_e} \; (\textit{dérivée avant}) \end{cases}$$



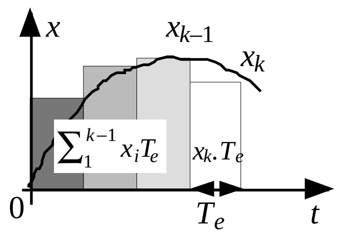
- *Dérivée seconde* = dérivée de la dérivée première.

$$\left.\begin{aligned} x'_k &= \frac{x_k - x_{k-1}}{T_e} \\ x'_{k-1} &= \frac{x_{k-1} - x_{k-2}}{T_e} \end{aligned}\right\} \Rightarrow y_k = x''_k = \frac{x'_k - x'_{k-1}}{T_e} = \frac{x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}}{T_e^2} \qquad \text{(dérivée arrière)}$$

• *Calcul approché d'une intégrale :*

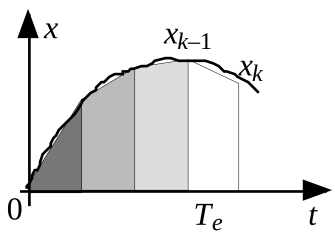
- 1er algorithme, déduit de la définition d'une dérivée approchée :

$$y(t) = \int_0^t x(\theta)\, d\theta \;\Rightarrow\; y_k = \sum_1^k x_i T_e \;\Rightarrow\; y_k = y_{k-1} + T_e x_k$$



- 2ème algorithme : méthode des trapèzes (plus précis) :

$$y_k = y_{k-1} + T_e \frac{x_k + x_{k-1}}{2}$$



• *Discrétisation approchée d'un système du 1er ordre*

- *Equation différentielle du 1er ordre :* $\tau \dfrac{dy}{dt} + y = x$

- *Equation aux différences et équation de récurence par la dérivée arrière :*

ISBN 2-9520781-0-6

$$\tau\frac{y_k - y_{k-1}}{T_e} + y_k = x_k \Rightarrow y_k = \frac{1}{1+\frac{T_e}{\tau}}y_{k-1} + \frac{\frac{T_e}{\tau}}{1+\frac{T_e}{\tau}}x_k$$

- *Equation aux différences et équation de récurence par la dérivée avant :*

$$\tau\frac{y_k - y_{k-1}}{T_e} + y_{k-1} = x_{k-1} \Rightarrow y_k = \left(1-\frac{T_e}{\tau}\right)y_{k-1} + \frac{T_e}{\tau}x_{k-1}$$

NB : dans les deux cas, le calcul ne peut commencer que si l'on connaît la première valeur, soit y_0, ce qui correspond à la condition initiale nécessaire à la résolution de l'équation différentielle du 1er ordre.

• Discrétisation approchée d'un système du 2ème ordre

- *Équation différentielle du 2ème ordre* (avec amortissement m) : $\tau^2\frac{d^2y}{dt^2} + 2m\tau\frac{dy}{dt} + y = x$

- *Équation aux différences et équation de récurence* (par la dérivée arrière) :

$$\left(\frac{\tau}{T_e}\right)^2\left(y_k - 2y_{k-1} + y_{k-2}\right) + 2m\frac{\tau}{T_e}\left(y_k - y_{k-1}\right) + y_k = x_k \Rightarrow y_k = \frac{2\left(1+m\frac{T_e}{\tau}\right)y_{k-1} - y_{k-2} + \left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2 x_k}{1+2m\frac{T_e}{\tau}+\left(\frac{T_e}{\tau}\right)^2}$$

NB : deux valeurs initiales, y_0 et y_1, sont nécessaires (ce qui correspond aux deux conditions initiales nécessaires à la résolution de l'équation différentielle du 2ème ordre)

ISBN 2-9520781-0-6