

B24 - Transformée de Fourier

• Séries de Fourier : spectres d'amplitude et de phase

Une fonction périodique de période T , de pulsation $\omega = 2\pi/T$, de fréquence $F = 1/T$, est décomposable en une somme de fonctions sinusoïdales appelée "Série de Fourier" :

$$y(t) = \langle y \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} Y_n \cdot \sin(2\pi n F t + \varphi_n)$$

On appelle :

- valeur moyenne, ou composante continue, la composante de fréquence nulle ($n = 0$) : $\langle y \rangle$
- harmonique de rang n , la composante de fréquence $f = nF$: $y_n(t) = Y_n \sin(2\pi n F t + \varphi_n)$
- fondamental, l'harmonique de rang 1 : $y_1(t) = Y_1 \sin(2\pi F t + \varphi_1)$

L'amplitude et la phase des harmoniques sont fonctions de n , donc de la fréquence f . On les calcule à l'aide des relations suivantes :

$$Y_n \sin(2\pi n F t + \varphi_n) = A_n \cos(2\pi n F t) + B_n \sin(2\pi n F t)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \cos(2\pi n F t) dt \quad (\text{partie réelle})$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} y(t) \sin(2\pi n F t) dt \quad (\text{partie imaginaire})$$

$$Y_0 = \langle y \rangle = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t) dt = \frac{A_0}{2}$$

On appelle :

$$Y(f) = \{Y_n\} = \left\{ \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \right\} \quad (\text{spectre d'amplitude} = \text{suite des amplitudes})$$

$$\varphi(f) = \{\varphi_n\} = \left\{ \arctg \frac{B_n}{A_n} \right\} \quad (\text{spectre de phase} = \text{suite des phase})$$

La représentation fréquentielle ou « spectrale » d'un signal périodique, c'est-à-dire $Y(f)$ et $\varphi(f)$, est le corollaire, dans l'espace des fréquences, de la représentation temporelle $y(t)$. Les quantités A_n et B_n sont respectivement la partie réelle et la partie imaginaire du spectre.

Propriétés :

1°) Pour un signal périodique, cette représentation est discrète : $Y(f)$ et $\varphi(f)$ ne sont définis que pour f multiple de la fréquence F du signal ($f = nF$). Ces spectres sont dits "spectres de raies".

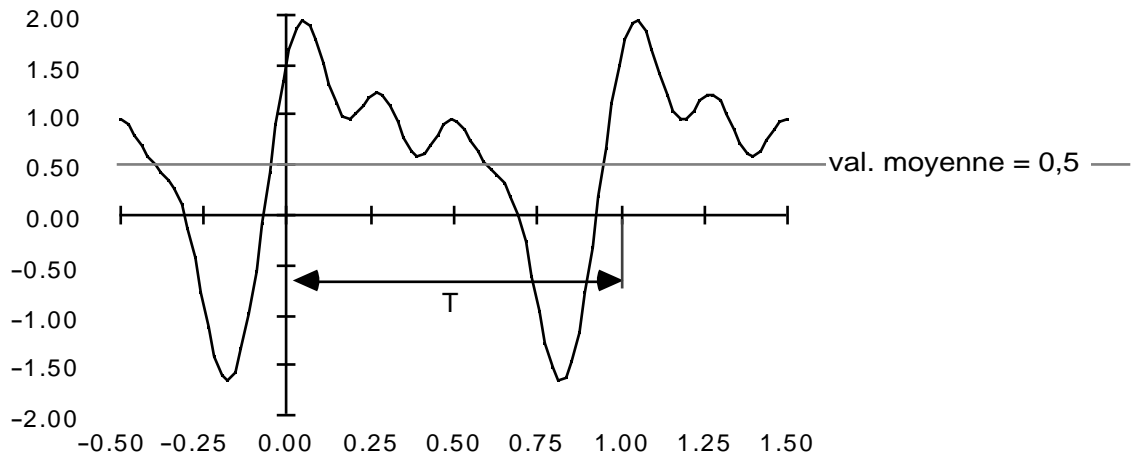
2°) Cette représentation est finie ou infinie :

-Ex. 1 : signal carré : un signal présentant des discontinuités a un spectre constitué d'une infinité de termes (les termes du spectre d'amplitude d'un signal carré varient comme $1/f$).

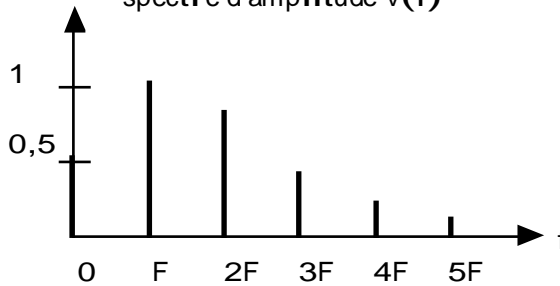
-Ex. 2 : Le signal proposé dans l'exemple qui suit (période T égale à 1s, soit $\omega = 2\pi$ rad/s) est une somme finie de 5 termes :

$$y(t) = 0,5 + \sin(\omega t) + 0,8 \cdot \sin(2\omega t + \pi/4) + 0,4 \cdot \sin(3\omega t - 3\pi/2) + 0,2 \cdot \sin(4\omega t + \pi/2) + 0,1 \cdot \sin(5\omega t - \pi/3)$$

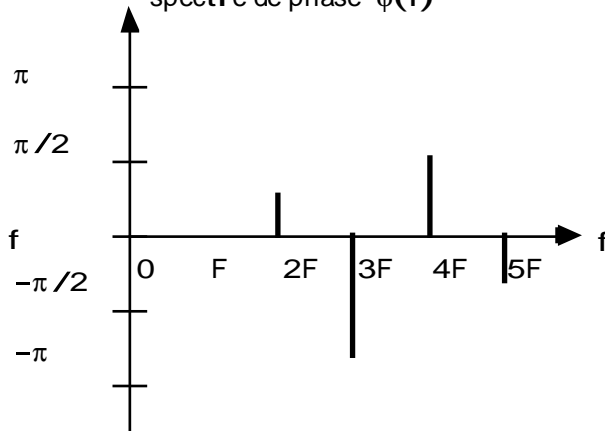
Sa représentation temporelle et son spectre sont :



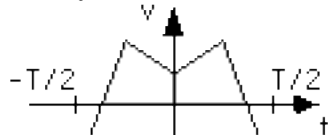
spectre d'amplitude $V(f)$



spectre de phase $\varphi(f)$



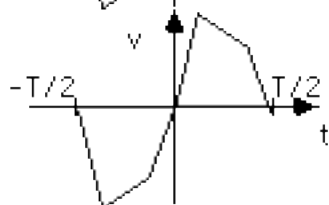
3°) (cf cours de mathématiques) : symétries



Fonction paire : $y(t) = y(-t) \Rightarrow \varphi(f) = \pm \pi/2$ quelque soit n



Fonction impaire : $y(t) = -y(-t) \Rightarrow \varphi(f) = 0$ ou π quelque soit n



Symétrie demi-onde : $y(t) = -y(t + T/2) \Rightarrow$ pas d'harmoniques de rang pair (cas fréquent dans l'étude des signaux électriques usuels)

• Spectre de puissance

On cherche la décomposition en fréquence de la valeur efficace vraie du signal. On montre que la puissance contenue dans le signal est la même que la puissance contenue dans le spectre (théorème de Parseval). Soit, en termes de valeurs efficaces :

$$Y_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_{(T)} y^2(t) \cdot dt = \langle y \rangle^2 + \sum_{n=1}^{+\infty} Y_{\text{neff}}^2 \quad \text{avec } Y_{\text{neff}} = \frac{Y_n}{\sqrt{2}}$$

où Y_{eff} est la valeur efficace vraie du signal composite. La suite $\{\langle y \rangle^2, Y_{\text{neff}}^2\}$ est appelée spectre de "puissance".

Remarques :

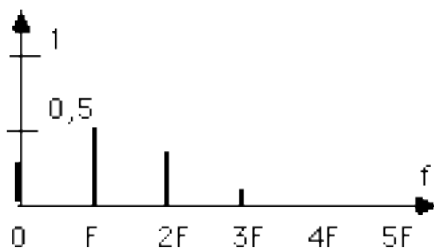
1°) il s'agit en réalité du spectre des valeurs efficaces, le spectre de puissance s'en déduisant à un facteur près ($1/R$ par exemple dans $P = U_{\text{eff}}^2 / R$).

2°) la valeur efficace vraie du signal composite est donc égale à : $Y_{\text{eff}} = \sqrt{\langle y \rangle^2 + Y_{1\text{eff}}^2 + Y_{2\text{eff}}^2 + \dots}$

Cette relation étend à un nombre quelconque de composantes la formule de la valeur efficace vraie d'un signal périodique (cf § A14) : $Y_{\text{eff}} = \sqrt{Y_{\text{DC}}^2 + Y_{\text{AC}}^2}$

On indique ci-dessous l'allure de ce spectre pour le signal présenté précédemment.

n	0	1	2	3	4	5
Y_{neff}^2	0,25	0,5	0,32	0,08	0,02	0,005



• Séries de Fourier en notation complexe

A partir des relations $\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$ et $\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$ on pose : $\underline{Y}(nF) = \underline{Y}_n = \frac{A_n - jB_n}{2}$

Il vient :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{Y}_n e^{j2\pi nFt}$$

qui est la décomposition de $y(t)$ en une série complexe où $\langle y \rangle = Y_0$, sans changement, et :

$$\underline{Y}(nF) = \underline{Y}_n = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t) \cdot e^{-j2\pi nFt} dt \quad \text{avec} \quad \begin{cases} |\underline{Y}_n| = \frac{1}{2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \\ \text{Arg}(\underline{Y}_n) = -\frac{B_n}{A_n} \end{cases}$$

Les spectres de phase et d'amplitude se déduisent donc des coefficients \underline{Y}_n par les relations :

$$Y(f) = \{2 |\underline{Y}_n|\} \quad \text{avec } Y(0) = \langle y \rangle = Y_0$$

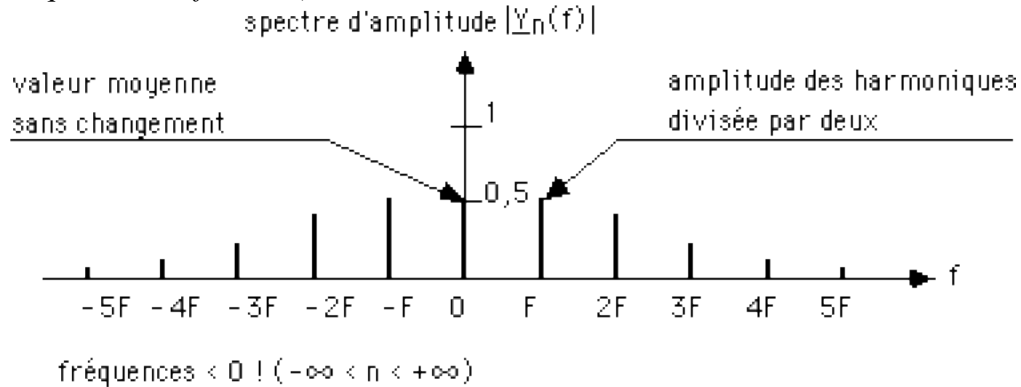
$$\varphi(f) = \{-\text{Arg}(\underline{Y}_n)\}$$

On indique ci-dessous le graphe de la fonction $|Y(f)|$ (avec toujours $f = nF$). Noter les différences

entre cette représentation effectuée à partir d'un calcul en nb complexes et le spectre réel $Y(f)$, $\varphi(f)$:

- le spectre d'amplitude est divisé par deux (sauf la composante continue) ; le spectre de phase est l'opposé du spectre réel.
- cette représentation complexe introduit des fréquences négatives !

(Dans l'emploi d'un analyseur de spectre, il est important de savoir quel est le type de représentation que celui-ci fournit !)



• **Signaux quelconques : spectre continu**

On étend les résultats qui précèdent au cas des signaux quelconques, définis de $t = -\infty$ à $+\infty$. De tels signaux, non périodiques, ont un spectre continu complexe défini de $f = -\infty$ à $+\infty$ lié au signal par les relations suivantes :

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underline{Y}(nF) e^{j2\pi nFt} \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \underline{Y}(f) e^{j2\pi ft} df$$

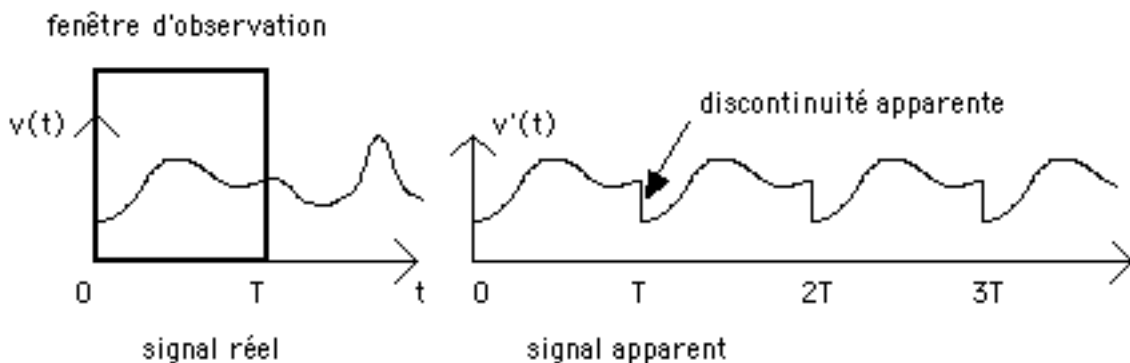
$$\underline{Y}(nF) = \frac{1}{T} \int_{(T)} y(t) e^{-j2\pi nFt} dt \rightarrow \underline{Y}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t) e^{-j2\pi ft} dt$$

Ces relations sont appelées respectivement "Transformation de Fourier inverse" et "Transformation de Fourier". Signal et spectre sont transformés l'un de l'autre.

Tout se passe comme si l'on calculait la décomposition en série de Fourier d'un signal dont la période tendait vers l'infini : les raies du spectres sont de plus en plus rapprochées, jusqu'à former un graphe continu.

• **Fenêtrage (windowing) : "périodisation" du signal \Rightarrow échantillonnage du spectre**

Que ce soit au moyen d'un outil de calcul (ordinateur) ou d'un appareil de mesure (analyseur de spectre), on ne peut observer un signal que sur une durée finie. Cela entraîne une limitation des bornes des intégrales précédentes à la durée T d'observation. Tout se passe alors comme si le signal réellement observé était périodique de période T :



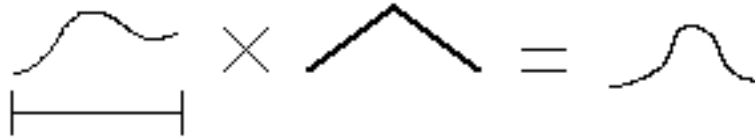
Conséquences :

1) On constate que le choix de la fenêtre d'observation est important : il y a un risque de perte d'information si on choisit une durée d'observation trop courte ou si la fenêtre est mal positionnée par rapport au signal.

2) D'autre part, le signal apparent étant périodique de période T , le calcul du spectre renvoie au calcul d'une série de Fourier : *il ne peut fournir qu'un spectre de raies, dont la précision (écart entre 2 raies) vaut :*

$$\Delta f = 1/T$$

3) Le fenêtrage peut introduire une discontinuité dans le signal observé, qui n'existe pas en réalité (cf fig. ci-dessus), ce qui entraîne une déformation importante du spectre vers les hautes fréquences. Pour atténuer ce phénomène, on multiplie souvent le signal observé dans la fenêtre par une fonction dite « de pondération » qui « adoucit les angles », la plus simple étant la fonction triangulaire :

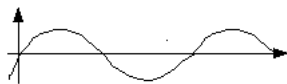


• **Échantillonnage (sampling) du signal** \Rightarrow "périodisation" du spectre

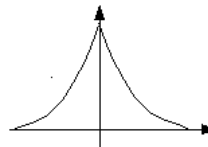
Pour pouvoir effectuer un calcul de spectre, il faut en réalité l'échantillonner. Soit T_e la valeur du pas d'échantillonnage. Si l'on appelle N le nombre d'échantillons temporels relevés pendant la durée d'observation T , on a la relation : $T = N.T_e$

On a vu ci-dessus qu'une périodisation du signal (par fenêtrage) entraîne un échantillonnage du spectre (spectre de raies). Réciproquement, on montre (voir compléments ci-dessous) qu'un échantillonnage du signal entraîne une périodisation du spectre :

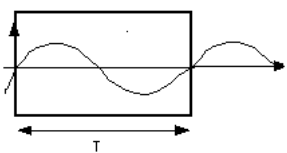
signal quelconque



\Rightarrow spectre continu

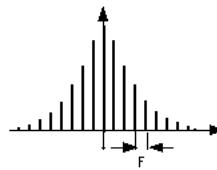


signal fenêtré ou périodique

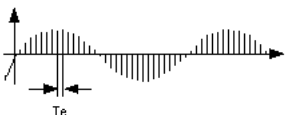


\Rightarrow spectre échantillonné (spectre de raies)

$$\Delta f = 1/T$$

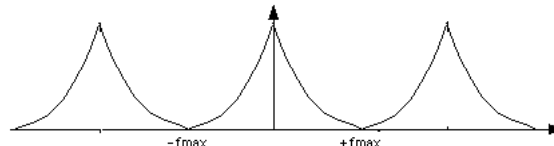


signal échantillonné

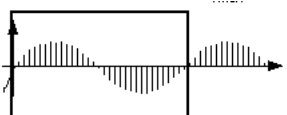


\Rightarrow spectre périodique

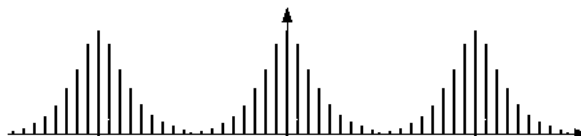
$$2f_{\max} = 1/T_e$$



signal fenêtré et échantillonné

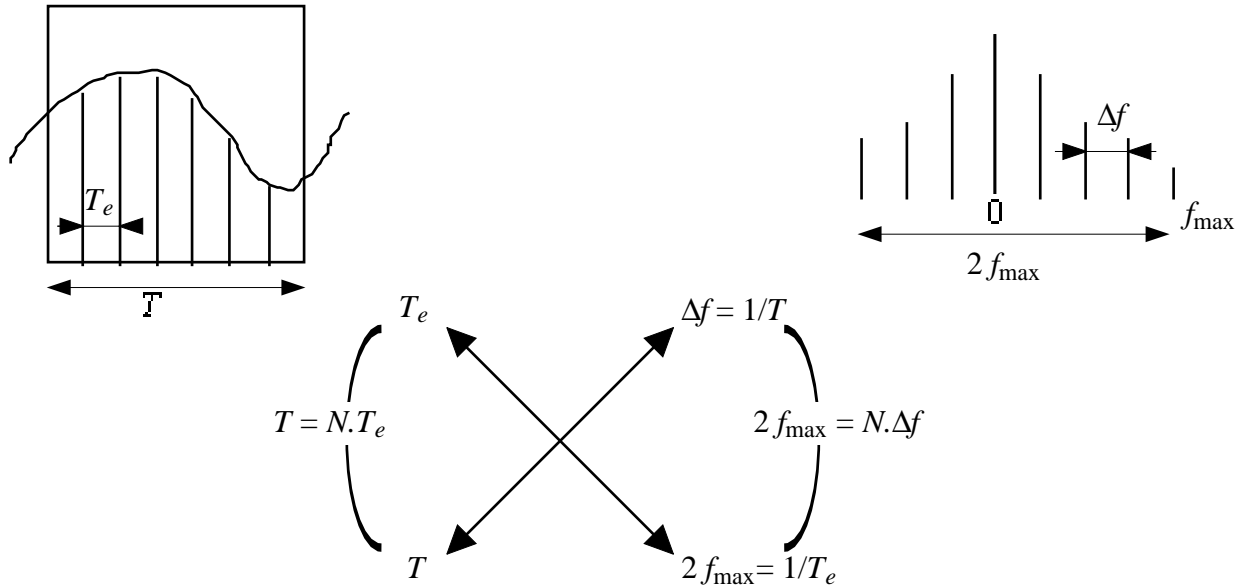


\Rightarrow spectre périodique et échantillonné



En résumé, on indique ci-dessous les relations fondamentales entre les principaux paramètres de

l'analyse spectrale numérique. Il existe cinq paramètres : N , T , T_e , Δf et f_{\max} liés entre eux. Le choix de deux d'entre eux fixe la valeur des trois autres.



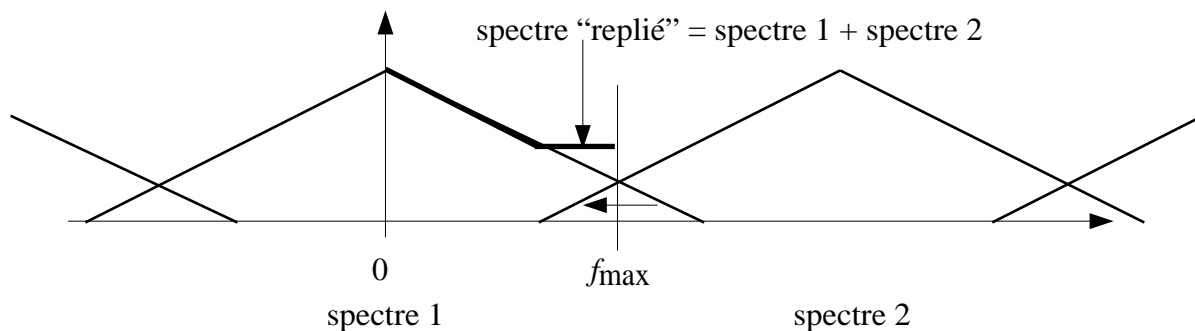
• **Théorème de Shannon**

De ces relations on déduit :

$$f_{\max} = F_e / 2$$

Cela constitue une démonstration dans le domaine des fréquences du théorème de Shannon (cf § B15)

Conséquence pratique : si le signal échantillonné comporte des fréquences supérieures à $F_e/2$, chaque période du spectre « déborde » sur la suivante, et l'analyseur fournit la somme des différentes composantes spectrales. Tout se passe comme si le spectre était « replié » à la fréquence $F_e/2$ (voir figure), ce qui entraîne des erreurs importantes.



Pour éviter ce phénomène il faut utiliser, comme dans tout système numérique (cf § B17), un filtre passe-bas de bande passante $F_e/2$, dit filtre « anti-repliement » (*anti-aliasing*), placé en amont de l'analyseur, pour empêcher que les composantes de haute fréquence ne viennent perturber l'analyse.

• **Relation fondamentale**

La transformée de Fourier d'un produit de convolution est égale au produit des transformées de Fourier (et réciproquement).

Application : le principe du filtrage repose donc sur l'équivalence suivante :

$$y(t) = h(t)*x(t) \Leftrightarrow Y(f) = H(f) \cdot X(f)$$

où h et H sont respectivement la réponse impulsionnelle et la transmittance du filtre. En traitement numérique des signaux, une méthode de synthèse des filtres, très utilisée, découle de cette relation. Étant donnée une certaine fonction de transfert H désirée, on calcule par transformation de Fourier inverse sa réponse impulsionnelle, dont la suite des valeurs numériques n'est autre que la suite des coefficients numériques du filtre RIF à synthétiser (cf § B23).

* * * * * **COMPLEMENTS** * * * * *

• **Calcul du spectre d'un signal échantillonné par transformation de Fourier discrète (TFD)**

Sachant que $T_e = T/N = 1/NF$, et en posant $W_N^{nk} = e^{j2\pi \frac{nk}{N}}$:

$$y_{\Pi}(kT_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(nF) \cdot e^{j2\pi nFkT_e} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} Y(nF) \cdot W_N^{nk}$$

On est ramené, dans le calcul de $Y_{\Pi}(f)$, d'une intégrale à une série :

$$Y(nF) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{\Pi}(kT_e) \cdot e^{-j2\pi nFkT_e} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{\Pi}(kT_e) \cdot W_N^{-nk}$$

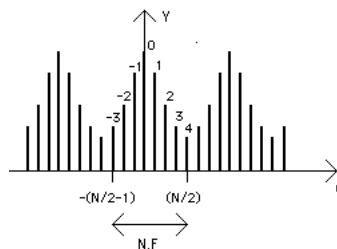
La fonction $y_{\Pi}(kT_e)$ comprend N valeurs, pour $k = 0, 1, \dots, N-1$. On pourrait croire que la fonction $Y(nF)$ comprend une infinité de valeurs, pour $n = -\infty, \dots, -1, 0, 1, \dots, +\infty$. En réalité, à cause du facteur imaginaire pur W , cette fonction est périodique, de période NF :

$$W_N^{-(n+N)k} = e^{-j2\pi \frac{k(n+N)}{N}} = e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} \cdot e^{-j2\pi k} = e^{-j2\pi \frac{kn}{N}} = W_N^{-nk}$$

Elle ne comprend donc que N valeurs distinctes, espacées de F , de $f_{\min} = -\left(\frac{N}{2} - 1\right)F$ à $f_{\max} = \frac{N}{2}F$.

Remarque : cette dernière relation n'est autre que l'expression du théorème de Shannon : comme $F = 1/T$, avec $T = N \cdot T_e$ et $T_e = 1/F_e$ (la fréquence d'échantillonnage), il vient : $f_{\max} = F_e/2$.

Exemple : spectre d'amplitude avec $N = 8$:



Comme la fonction Y_n est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, on n'obtient en réalité que $N/2$ valeurs réellement exploitables, qu'il faudra multiplier par 2 (sauf la composante continue) pour obtenir le spectre d'amplitude. Les relations qui découlent des considérations précédentes sont finalement :

$$Y_{\Pi}(nF) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} y_{\Pi}(kT_e) \cdot W_N^{-nk}$$

$$y_{\Pi}(kT_e) = \sum_{n=0}^{N-1} Y_{\Pi}(nF) \cdot W_N^{nk}$$

Elles définissent respectivement la transformation de Fourier discrète (TFD) et son inverse.

En jouant sur les propriétés de symétrie des facteurs W^{nk} on a mis au point un algorithme de transformation de Fourier rapide (*Fast Fourier Transform* : *FFT*) qui est communément utilisé dans les programmes d'analyse spectrale.